

## COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 (F) - Primer cuatrimestre de 2005

### Práctica 3 - Transformaciones lineales

**Ejercicio 1.** Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

- i)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3, 0, 3x_2 + 2x_3)$
- ii)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$
- iii)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$  (considerando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.)
- iv)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- v)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
- vi)  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

**Ejercicio 2.** Interpretar geoméricamente las siguientes aplicaciones lineales  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

- i)  $f(x, y) = (x, 0)$
- ii)  $f(x, y) = (0, y)$
- iii)  $f(x, y) = (x, -y)$
- iv)  $f(x, y) = (\frac{1}{2} \cdot (x + y), \frac{1}{2} \cdot (x + y))$
- v)  $f(x, y) = (x \cdot \cos t - y \cdot \sin t, x \cdot \sin t + y \cdot \cos t)$  con  $t \in \mathbb{R}$  fijo.

**Ejercicio 3.** Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

- i)  $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$
- ii)  $t : K^{n \times m} \rightarrow K^{m \times n}$ ,  $t(A) = A^t$
- iii)  $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$ ,  $f(A) = B \cdot A$  donde  $B \in K^{r \times n}$
- iv)  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\delta(f) = f'$
- v)  $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ ,  $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$
- vi)  $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$ ,  $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$  donde  $\alpha \in K$

**Ejercicio 4.**

- i) Probar que existe una única transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (-5, 3)$  y  $f(-1, 1) = (5, 2)$ . Para dicha  $f$ , determinar  $f(5, 3)$  y  $f(-1, 2)$
- ii) ¿Existirá una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (2, 6)$ ;  $f(-1, 1) = (2, 1)$  y  $f(2, 7) = (5, 3)$ ?

- iii) Sean  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformaciones lineales tales que  $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$ ,  $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$ ,  $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$ ,  $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$ ,  $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$  y  $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$ . Determinar si  $f = g$ .
- iv) Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales exista una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga que  $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$ ,  $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$  y  $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$ .

**Ejercicio 5.**

- i) Calcular el núcleo y la imagen de cada transformación lineal de los Ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si  $f$  es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular  $f^{-1}$ .
- ii) Clasificar las transformaciones lineales  $tr, t$  y  $\epsilon_\alpha$  del Ejercicio 3 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

**Ejercicio 6.** Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$  y  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ . Calcular el núcleo y la imagen de  $f$ , de  $g$  y de  $g \circ f$ . Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

(\*) **Ejercicio 7.** Sean  $g : V \rightarrow V'$  y  $f : V' \rightarrow V''$  transformaciones lineales. Probar:

- i)  $\text{Nu}(g) \subseteq \text{Nu}(f \circ g)$
- ii) Si  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ , entonces  $\text{Nu}(g) = \text{Nu}(f \circ g)$
- iii)  $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$
- iv) Si  $\text{Im}(g) = V'$ , entonces  $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$

**Ejercicio 8.**

- i) ¿Existirá algún epimorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ?
- ii) Sean  $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 1, 0)$  y  $v_3 = (1, 1, 1, 1)$ . ¿Existirá alguna transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{Im}(f)$ ?
- iii) ¿Existirá algún monomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?
- iv) Sean  $S, T \subset \mathbb{R}^4$  definidos por  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  y  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$ . ¿Existirá algún isomorfismo  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $f(S) = T$ ?
- v) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  que verifique  $\text{Im}(f) = S$  y  $\text{Nu}(f) = T$  en los siguientes casos:
- a)  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$
- b)  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$

**Ejercicio 9.** En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que verifique lo pedido:

- i)  $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$  y  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$
- ii)  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$
- iii)  $f \neq 0$  y  $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$
- iv)  $f \neq 0$  y  $f \circ f = 0$
- v)  $f \neq \text{Id}$  y  $f \circ f = \text{Id}$
- vi)  $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$ ,  $\text{Im}(f) \neq \{0\}$  y  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

**Ejercicio 10.** Sea  $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .

- i) Hallar una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$ .
- ii) Hallar ecuaciones para  $S$  (usar i))
- iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea  $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + \langle (0, 1, 1, 2) \rangle$

**Ejercicio 11.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Se define la aplicación  $\alpha_B : V \rightarrow K^n$  de la siguiente manera:

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad \alpha_B(v) = (x_1, \dots, x_n)$$

Probar que  $\alpha_B$  es un isomorfismo.

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación  $\alpha_B$  es tomar coordenadas en la base  $B$ , esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

- i)  $\{w_1, \dots, w_s\}$  es linealmente independiente en  $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_s)\}$  es linealmente independiente en  $K^n$
- ii)  $\{w_1, \dots, w_r\}$  es un sistema de generadores de  $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_r)\}$  es un sistema de generadores de  $K^n$
- iii)  $\{w_1, \dots, w_n\}$  es una base de  $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_n)\}$  es una base de  $K^n$

Por ejemplo, para decidir si  $\{X^2 - X + 1, X^2 - 3X + 5, 2X^2 + 2X - 3\}$  es una base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , bastará ver si  $\{(1, -1, 1), (1, -3, 5), (2, 2, -3)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ , para lo que se puede usar el método de triangulación.

**Ejercicio 12.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal.  $f$  se llama un *proyector* si y sólo si  $f \circ f = f$ .

- i) Probar que  $f : V \rightarrow V$  es un proyector  $\iff f(v) = v \quad \forall v \in \text{Im}(f)$ .
- ii) En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla:

- a)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$   
 b)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$
- iii) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Probar que  $V = \text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .
- iv) Sea  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sean  $S$  y  $T$  subespacios de  $V$  tales que  $V = S \oplus T$ . Probar que existe un único proyector  $f : V \rightarrow V$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$  e  $\text{Im}(f) = T$ .

**Ejercicio 13.** Dada  $f : V \rightarrow V$ , calcular  $|f|_{BB'}$  en cada uno de los siguientes casos:

- i)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$   
 a)  $B = B'$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .  
 b)  $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$  y  $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$ .
- ii)  $V = \mathbb{C}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$   
 a)  $B = B'$  la base canónica de  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.  
 b)  $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$  considerando a  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.
- iii)  $V = \mathbb{R}_4[X]$ ,  $f(P) = P'$   
 a)  $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ .  
 b)  $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ ,  $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$ .
- iv)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(A) = A^t$ ,  $B = B'$  la base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

**Ejercicio 14.** Sea  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$  y  $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  una base de  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- i) Hallar  $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$  ¿Cuáles son sus coordenadas en la base  $B'$ ?
- ii) Hallar una base de  $\text{Nu}(f)$  y una base de  $\text{Im}(f)$ .
- iii) Describir el conjunto  $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$ .

**Ejercicio 15.** En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  que verifique:

- i)  $A \neq I_3$  y  $A^3 = I_3$   
 ii)  $A \neq 0$ ;  $A \neq I_3$  y  $A^2 = A$

**Ejercicio 16.** Mostrar, en cada uno de los siguientes casos, una matriz  $A$  con coeficientes reales de manera que el sistema  $A.x = b$  cumpla:

- i) No tiene solución o tiene solución única, dependiendo del valor de  $b$ .
- ii) Tiene infinitas soluciones, independientemente del valor de  $b$ .
- iii) No tiene solución o tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor de  $b$ .
- iv) Tiene solución única, independientemente del valor de  $b$ .

**Ejercicio 17.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Probar que existe una base  $B$  de  $V$  tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j ; i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: Recordar que, si  $f$  es un proyector,  $V = \text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .)

**Ejercicio 18.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

- i) Determinar bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ii) Si  $A$  es la matriz de  $f$  en la base canónica, encontrar matrices inversibles  $C$  y  $D$  tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 19.** Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 20.** Calcular el rango de  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  para cada  $k \in \mathbb{R}$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 21.**

i) Sea  $A \in K^{m \times n}$  y sea  $S = \{x \in K^n / A.x = 0\}$ . Probar que  $\text{rg}(A) + \dim(S) = n$ .

(Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes).

ii) Sean  $A \in K^{m \times n}$  y  $b \in K^m$ . Se considera el sistema  $A.x = b$  y sea  $(A|b)$  su matriz ampliada. Probar que  $A.x = b$  tiene solución  $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$ .

(\*) **Ejercicio 22.** Sean  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{n \times r}$ . Probar que

$$\text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(A) \quad \text{y} \quad \text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(B).$$

**Lectura complementaria:** Algunas transformaciones lineales (también llamadas operadores) asociadas a la física pueden encontrarse en

<http://phyvax.ir.miami.edu:8001/nearing/mathmethods/>

(*Mathematical Tools for Physics* de James Nearing, Capítulo 7, págs. 1-11.)