

COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 (F) - Primer cuatrimestre de 2005

Práctica 4 - Determinantes

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \text{ii)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{iv)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} & \text{v)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} & \text{vi)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 2.

- i) Sea $A \in K^{n \times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$
- ii) Calcular el determinante de $A \in K^{n \times n}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.

- i) Si $A \in K^{n \times n}$, $B \in K^{m \times m}$ y $C \in K^{n \times m}$, sea $M \in K^{(n+m) \times (n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- ii) Hallar una matriz $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ de la forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con A, B, C y D en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\det(M) \neq \det(A) \cdot \det(D) - \det(B) \cdot \det(C)$.
- iii) Sean $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ y para cada i , $1 \leq i \leq n$ sea $A_i \in K^{r_i \times r_i}$. Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

Calcular $\det(M)$.

Ejercicio 4. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Dada la matriz de **Vandermonde**:

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Probar que $\det(V(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i)$

Ejercicio 6. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversible tal que $A \cdot C = C \cdot B$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

Ejercicio 8.

i) Sean $v_1 = (a, b, c)$ y $v_2 = (d, e, f)$ vectores en \mathbb{R}^3 . Probar que la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

- ii) Con las mismas notaciones del ítem anterior, probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\varphi(x, y, z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B = (b_{ij})$ una matriz tal que $\det(A+B) = \det(A-B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

Ejercicio 10.

- i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Probar que el sistema $A.x = 0$ tiene solución única si y sólo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

- ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$.

Ejercicio 11. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

Sugerencia: Derivar $n - 1$ veces la función $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$.

Ejercicio 12. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iv) } \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre \mathbb{R} empleando la regla de Cramer:

$$\text{i) } \begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2.x_3 = 1 \\ 2.x_1 + x_2 + 4.x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2.x_2 - 4.x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5.x_1 + x_2 - 3.x_3 + 2.x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 14. Dadas las funciones reales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ que satisfacen

$$\begin{cases} x_1(t) + t.x_2(t) + t^2.x_3(t) = t^4 \\ t^2.x_1(t) + x_2(t) + t.x_3(t) = t^3 \\ t.x_1(t) + t^2.x_2(t) + x_3(t) = 0 \end{cases}$$

calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t)$.

Ejercicio 15. Sea $A \in K^{3 \times 3}$ no inversible tal que $A_{11}.A_{33} - A_{13}.A_{31} \neq 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in K^3 / A.x = 0\}$.

Ejercicio 16.

- i) Sea $A \in K^{n \times n}$ una matriz inversible. Calcular $\det(\text{adj } A)$.
- ii) Sea $A \in K^{n \times n}$ una matriz tal que $\text{rg } A < n - 1$. Probar que $\text{adj } A = 0$.
- (*) iii) Sea $A \in K^{n \times n}$ tal que $\text{rg } A = n - 1$. Probar que $\text{rg } (\text{adj } A) = 1$.

Lectura complementaria: Una aplicación del determinante a la orientación de bases en \mathbb{R}^n puede encontrarse en el libro *Algebra Lineal y Geometría* de Angel R. Larotonda, Capítulo III (§ 3.11), págs. 309 - 314.