COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 (F) - Primer cuatrimestre de 2005

Práctica 6 - Forma de Jordan

Ejercicio 1. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \le j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Ejercicio 3. Dadas las matrices A y A' en $K^{6\times 6}$

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.

ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_5[X]$ tales que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

iii) Calcular A^k para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz nilpotente tal que $A^5 \neq 0$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

Ejercicio 5.

i) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, $\mathrm{rg}(A^2) = 4$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

ii) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 9$, $\mathrm{rg}(A^2) = 5$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 6. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ vi) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

vii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ viii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -10 & 16 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = < e^x\,,\, x.e^x\,,\, x^2.e^x\,,\, e^{2x} >$. Sea $t: V \to V$ la transformación lineal definida por $t(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para t.

Ejercicio 8. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para cada $a \in \mathbb{R}$, hallar la forma y una base de Jordan de A.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^2 = 11$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^3 = 10$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^4 = 10$,
$\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^2 = 11$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^3 = 10$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^4 = 9$,
$\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id)^2 = 12$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id)^3 = 11$.

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A-invariantes.

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Hallar la forma y una base de Jordan para A.

ii) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 12. Sean $A\,,\, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 13. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

i) Calcular $J(\lambda, m)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.

Sugerencia: $J(\lambda, m) = \lambda I_m + J(0, m)$.

($*$) ii) Verificar que $\mathrm{rg}(J(\lambda, m)^k - \lambda^k I_m) = m - 1$ para $\lambda \neq 0$.

($*$) iii) Si $\lambda \neq 0$, hallar la forma de Jordan de $J(\lambda, m)^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 14. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha\,,\ a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4.a_{n+1} - 4.a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

Sugerencia: Ver el Ejercicio 9 de la Práctica 5.

Ejercicio 15. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Calcular e^A.

ii) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \\ z' = -x - y + 3z \end{cases}$ con condiciones iniciales $x(0) = 1,\ y(0) = -1,\ z(0) = 2$.

Lectura complementaria: Una formalización del concepto de exponencial de una matriz así como la aplicación a sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias pueden encontrarse en el libro clásico *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra* de M. Hirsch y S. Smale (págs 75-98). Una aplicación a un problema de caudal puede encontrarse en el libro *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra* de Carl Meyer (Capítulo 7, Ejemplo 7.9.7, págs 610-611). Otra aplicación a oscilaciones con amortiguación puede encontrarse en el libro de J. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra* (http://www.math.fu-berlin.de/rd/we-02/numerik/LEHRE/WS0405/ALGEBRA/skripte/demmch4.pdf, Ejemplo 4.1, págs 142-145). Por último, una breve descripción de la Forma de Jordan puede encontrarse en la página de la materia optativa "Dinámica no lineal", dictada por el Departamento de Física (http://nld.df.uba.ar/materia/jordan.pdf).