

COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2005

Práctica 7 - Espacios vectoriales con producto interno

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

- i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
- ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$
- iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
- iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + x_2.\bar{y}_2 - x_1.\bar{y}_2 - x_2.\bar{y}_1$
- v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + (1+i).x_1.\bar{y}_2 + (1+i).x_2.\bar{y}_1 + 3.x_2.\bar{y}_2$
- vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = x_1.\bar{y}_1 - i.x_1.\bar{y}_2 + i.x_2.\bar{y}_1 + 2.x_2.\bar{y}_2$
- vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + x_3.\bar{y}_3 - x_1.\bar{y}_3 - x_3.\bar{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
- viii) $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K$, $\Phi(x, y) = 3.x_1.\bar{y}_1 + x_2.\bar{y}_1 + 2.x_2.\bar{y}_2 + x_1.\bar{y}_2 + x_3.\bar{y}_3$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 2.

- i) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$.
 - a) Probar que Φ es un producto interno.
 - b) Encontrar una base de \mathbb{R}^2 que sea ortonormal para Φ .
- ii) Encontrar una base de \mathbb{C}^2 que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 1. vi).

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

- i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$
- ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$
- iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
- iv) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R} la función $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1+b).x_3.y_3$$

es un producto interno en \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

- i) $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
- ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$
- iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K$, $\langle x, y \rangle = \bar{y} \cdot Q^* \cdot Q \cdot x^t$
donde $Q \in K^{n \times n}$ es una matriz inversible, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 6. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 7. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V :

- i) $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2 \cdot x_1 - x_2 = 0\}$
para el producto interno canónico.
- ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$
 - a) Para el producto interno canónico.
 - b) Para el producto interno definido por $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$.
- iii) $V = \mathbb{C}^3$, $S_3 = \langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle$ para el producto interno canónico
- iv) $V = \mathbb{C}^4$, $S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2i \cdot x_2 - x_3 + (1+i) \cdot x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i) \cdot x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$
para el producto interno $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot \bar{y}_1 + 2 \cdot x_2 \cdot \bar{y}_2 + x_3 \cdot \bar{y}_3 + 3 \cdot x_4 \cdot \bar{y}_4$.
- v) $V = \mathbb{R}^4$, $S_5 = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle$ para el producto interno canónico.

Ejercicio 8.

- i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.
- ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.
- iii) Hallar el punto de S_5 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$. Calcular la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S_5 .

Ejercicio 9.

- i) Se considera $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
- ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$.
 - a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$.
 - b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.

iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x) dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \text{sen}(\pi x) \rangle$.

iv) Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t).g(t) dt$.

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos t, \text{sen } t\}$.

b) Sea S el subespacio de $C[0, \pi]$ generado por B . Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 10. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

iii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(p) = p'$, donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x) dx$.

v) $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $f(A) = P^{-1}.A.P$, donde $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible y $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A.B^*)$.

vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = f.p$, donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x) dx$.

Ejercicio 11. Sea (V, \langle, \rangle) un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$.

Ejercicio 12. Sea (V, \langle, \rangle) un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de V . Probar que la proyección ortogonal $P : V \rightarrow V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 13.

i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ii) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
- ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$
- iii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$
- iv) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle (1, 0, 1) \rangle$.

Ejercicio 15. Dada la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

- i) Probar que f es una rotación.
- ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Aplicación del producto interno y del determinante al cálculo de volúmenes

Consideremos \mathbb{R}^n con el producto interno canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores v_1 y v_2 linealmente independientes en \mathbb{R}^n se puede calcular con la fórmula “base por altura”, o sea

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\|.$$

El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores v_1, v_2, v_3 linealmente independientes en \mathbb{R}^n sería “área de la base por altura”, o sea

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\|.$$

Si esto se generaliza a k vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n , el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ sería

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\| \cdots \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|.$$

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \text{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \text{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Demostrando los ítems i), ii) y iii) siguientes, se prueba que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes v_1, \dots, v_n en \mathbb{R}^n es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_n .

Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define la matriz $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ como

$$G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle.$$

i) Probar que:

- $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$.
- $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|v_k\|^2$.
- $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|^2$.

ii) Probar que, si v_1, \dots, v_k son vectores linealmente independientes,

$$(\text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k)).$$

iii) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_n .

- Probar que $G(v_1, \dots, v_n) = A^t \cdot A$.
- Deducir que $\text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$.

iv) a) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en \mathbb{R}^2 .

b) Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en \mathbb{R}^3 .

v) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Probar que, si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes,

$$\text{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f| \cdot \text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)).$$