

## COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2005

### Práctica 1 - Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

A lo largo de esta práctica,  $K$  simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

#### Sistemas de ecuaciones lineales

**Ejercicio 1.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales ( $K = \mathbb{R}$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} & \text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \\ \\ \text{iii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases} & \text{iv)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases} \\ \\ \text{v)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} & \end{array}$$

¿Cambia algo si  $K = \mathbb{C}$ ?

**Ejercicio 2.** Sea  $H$  un sistema lineal homogéneo de  $n$  ecuaciones con  $m$  incógnitas. Probar:

- i) Si  $n < m$ , entonces  $H$  tiene alguna solución no nula.
- ii) Si  $m < n$ , entonces existe un sistema lineal homogéneo  $H'$  de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas cuyo conjunto de soluciones coincide con el conjunto de soluciones de  $H$ .

**Ejercicio 3.** Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 4.** Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} & \text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases} \\ \\ \text{iii)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases} & \text{iv)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = \gamma \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \end{array}$$

**Ejercicio 5.** Sea  $H$  un sistema lineal no homogéneo y sea  $p$  una solución de  $H$ . Sea  $H_0$  el sistema lineal homogéneo asociado a  $H$ . Probar que si  $S$  y  $S_0$  son los conjuntos de soluciones de  $H$  y  $H_0$  respectivamente, entonces  $S = S_0 + p = \{s + p / s \in S_0\}$ .

**Ejercicio 6.** Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & \alpha_3 \end{cases}$$

Determinar los valores de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema admite solución.

**Ejercicio 7.** Determinar para qué valores de  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$  cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i) } \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = & -1 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = & 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = & -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = & b \end{cases}$$

**Ejercicio 8.** Encontrar los coeficientes de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que pasa por los puntos  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  y  $(3, 0)$ .

## Matrices

**Ejercicio 9.**

- i) Probar que,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , el producto de matrices en  $K^{n \times n}$  no es conmutativo. (Sugerencia: probarlo para  $K^{2 \times 2}$  y usar multiplicación por bloques.)
- ii) Caracterizar el conjunto  $\{A \in K^{3 \times 3} / A.B = B.A \ \forall B \in K^{3 \times 3}\}$ .

**Ejercicio 10.**

- i) Exhibir una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $A^2 = -I$ .
- ii) Sean  $A, B$  y  $C \in K^{n \times n}$ . Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones  $\forall n \geq 2$ :
  - (a)  $(A.B)^2 = A^2B^2$
  - (b)  $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$  ó  $B = 0$
  - (c)  $A.B = A.C$  y  $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
  - (d)  $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$
  - (e)  $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$
  - (f)  $A^2 = A \Rightarrow A = 0$  ó  $A = I_n$
- iii) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre  $A$  y  $B \in K^{n \times n}$  para que:
  - (a)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
  - (b)  $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$

**Ejercicio 11.** Probar que si  $A, B \in K^{m \times n}$  y  $A.x = B.x \forall x \in K^n$ , entonces  $A = B$ .

**Ejercicio 12.** Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{ii)} & A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{iii)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \text{iv)} & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{v)} & A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \text{vi)} & A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

**Ejercicio 13.** Sea  $A \in K^{n \times n}$  una matriz inversible y sean  $B, C \in K^{n \times m}$ . Probar:

i)  $A.B = A.C \Rightarrow B = C$

ii)  $A.B = 0 \Rightarrow B = 0$

**Ejercicio 14.** Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa para matrices  $A, B \in K^{n \times n}$ . Justificar:

i)  $A, B$  inversibles  $\Rightarrow A + B$  inversible

ii)  $A$  inversible  $\iff A^t$  inversible

Definición: Dada  $A \in K^{n \times n}$ , se llama *matriz transpuesta de A* a la matriz  $A^t \in K^{n \times n}$  que cumple que  $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq n$ .

iii)  $A$  nilpotente (es decir,  $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$ )  $\Rightarrow A$  no es inversible.

**Ejercicio 15.** Sea  $A \in K^{n \times n}$  y sea  $b \in K^n$ . Probar que el sistema  $A.x = b$  tiene solución única si y sólo si  $A$  es inversible.