COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2005

Práctica 2 - Espacios vectoriales

A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

Ejercicio 1. Probar en cada caso que el conjunto V, con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre K.

i) $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)/a_i \in K \ \forall i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K.

$$+ : \ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$$
$$. : \ k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

ii) Dado X un conjunto, sea $V = K^X = \{f : X \to K$ tal que f es una función$\}$.

$$+ : \ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$$
$$. : \ (k.f)(x) = k.f(x) \quad \forall x \in X$$

Ejercicio 2. Caracterizar geométricamente *todos* los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como K-espacio vectorial.

i) $S_1 = \{f \in K[X] \ / \ f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \geq 2\}$, $V = K[X]$

ii) $S_2 = \{f \in K[X] \ / \ f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 5\}$, $V = K[X]$

iii) $S_3 = \{M \in K^{4\times 4} \ / \ M^t = M\}$, $V = K^{4\times 4}$

iv) $S_4 = \{M \in K^{3\times 3} \ / \ \mathrm{tr}(M) = 0\}$, $V = K^{3\times 3}$

v) $S_5 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$

vi) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $S_6 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ f'' + af' + bf = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$

vii) $S_7 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ / \ \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$

viii) $S_8 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \ / \ \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0 \ \forall r \geq k\}$, $V = K^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 4. Sea $A \in K^{n\times m}$ y sea $S = \{x \in K^m \ / \ A.x = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A. Probar que S es un subespacio de K^m.

Ejercicio 5. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V.

i) Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V.

ii) Encontrar S y T subespacios de $V = \mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

(∗) iii) Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 6. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre K.

i) $K_n[X] = \{f \in K[X] \ / \ f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$

ii) $\mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{R}$

iii) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\,; \ x - y = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

iv) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ / \ A = -A^t\}$, $K = \mathbb{R}$

v) $S_3 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$, $K = \mathbb{R}$

vi) $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ / \ f''' = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

(∗) vii) $S_5 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1 \ \forall i \in \mathbb{N}\}$, $K = \mathbb{R}$

(∗) **Ejercicio 7.** Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f'' + f = 0\} = <\operatorname{sen} x, \cos x>$.

(Sugerencia: Probar que si $f'' + f = 0$, entonces $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

Ejercicio 8. Sea $S = <(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)> \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

ii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

iii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 9. Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3 \in V$.
Probar que si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$, entonces $< v_1, v_2, v_3 > = < v_3 >$.

Ejercicio 10. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

i) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v, w \in V$. Entonces $< v, w > = < v, w + 5v >$.

ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $< v_1, v_2, w > = < v_3, v_4, w >$. Entonces $< v_1, v_2 > = < v_3, v_4 >$.

iii) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3, w \in V$. Entonces

$$< v_1, v_2, v_3, w > = < v_1, v_2, v_3 > \iff w \in < v_1, v_2, v_3 >$$

Ejercicio 11. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre K.

i) $(1 - i, i)$, $(2, -1 + i)$ en $\mathbb{C}^2$ para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $(1 - X)^3$, $(1 - X)^2$, $1 - X$, 1 en $K[X]$

iii) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x \cos x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$

iv) $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{-x}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$

v) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, $v = (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, $w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots)$ en $K^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 12. Sea V un K-espacio vectorial. Probar:

i) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l.i. $\iff$ $\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l.i.

ii) $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$
$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l.i. $\iff$ $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l.i.

iii) $\lambda \in K$
$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l.i. $\iff$ $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l.i.

Notar que i), ii) y iii) justifica el "método de triangulación" para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en K^n.

Ejercicio 13. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente.

i) $\{(1, 2, k),\ (1, 1, 1),\ (0, 1, 1-k)\}$

ii) $\{(k, 1, 0),\ (3, -1, 2),\ (k, 2, -2)\}$

Ejercicio 14. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales.

i) $< (1, 4, -2, 1),\ (1, -3, -1, 2),\ (3, -8, -2, 7) >$, $K = \mathbb{R}$

ii) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ /\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

iii) $\{f \in \mathbb{R}[X] \ /\ f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y $f(2) = f(-1)\}$, $K = \mathbb{R}$

iv) $\{f \in \mathbb{R}[X] \ /\ f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y f es un múltiplo de $(x^2 - 2)\}$, $K = \mathbb{R}$

v) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \ /\ a_i = a_j \ \forall\, i, j\}$

Ejercicio 15.

i) Probar que el conjunto $\{(1, 0, 0),\ (0, i, 0),\ (1, 1, i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

ii) Probar que el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

iii) Probar que $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

Ejercicio 16. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

i) $\{(1, 1, 1, 1),\ (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$

ii) $\{X^3 - 2X + 1,\ X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X]$, $K = \mathbb{R}$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 17. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores.

i) $S = < (1,1,2),\ (1,3,5),\ (1,1,4),\ (5,1,1) > \subseteq \mathbb{R}^3,\ K = \mathbb{R}$

ii) $S = < X^2+2X+1,\ X^2+3X+1,\ X+2 > \subseteq \mathbb{R}[X],\ K = \mathbb{R}$

iii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2},\ K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 18. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

i) $S = < (1,k,1),\ (-1,k,1),\ (0,1,k) > \subset \mathbb{R}^3$

ii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

iii) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, A.x = 0\}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Ejercicio 19. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$< (-2,1,6), (3,0,-8) > = < (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) >$$

Ejercicio 20. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = K^n$; $v = (x_1, \dots, x_n)$ y $B = E$ la base canónica

ii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1,2,-1)$ y $B = \{(1,2,-1),(0,1,1),(0,0,2)\}$

iii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1,x_2,x_3)$ y $B = \{(1,2,-1),(2,1,3),(1,3,-3)\}$

iv) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3,\ X+1,\ X^2+5,\ X^3+X^2\}$

v) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 21. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C(B,B')$, hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B'.

i) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $B' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$, $v = (-1,5,6)$

ii) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3,\ 1+X,\ X^2\}$, $B' = \{1,\ X+3,\ X^2+X\}$, $v = X$

iii) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $B' = \{v_3,v_1,v_4,v_2\}$, $v = 2.v_1 + 3.v_2 - 5.v_3 + 7.v_4$

iv) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \{E^{11},\ E^{12},\ E^{21},\ E^{22}\}$ (la matriz E^{ij} es la matriz que tiene un 1 en el lugar ij y 0 en todos los demás lugares),

$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Ejercicio 22. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de K^n. Sea M la matriz cuyas columnas son $v_1, \dots, v_n$ y sea N la matriz cuyas columnas son $w_1, \dots, w_n$ (ordenadamente). Probar que $C(B,B') = N^{-1}M$.

Ejercicio 23. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa.

i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) / \, 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) / \, x + z = 0\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) / \, 3x - 2y + z = 0, \, x - y = 0\}$ y $T = < (1, 1, 0), (5, 7, 3) >$

iii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = < (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) >$ y $T = < (1, 1, 0), (3, 2, 1) >$

iv) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / \, f(1) = 0\}$ y $T = < 1, \, X, \, X^2, \, X^3 + 2X^2 - X, \, X^5 >$

v) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / \, f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] / \, f'(0) = f''(0) = 0\}$

Ejercicio 24. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = < (0, 1, 1) >$, siendo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \quad \text{y} \quad T = < (1, k, 2), (-1, 2, k) >$$

Ejercicio 25.

i) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \, / \, f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \, / \, f$ es constante$\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

ii) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \, / \, f(x) = f(-x) \; \forall \, x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \, / \, f(-x) = -f(x) \; \forall \, x \in \mathbb{R}\}$ (los elementos de S se llaman *funciones pares* y los de T, *funciones impares*). Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

iii) Sean $S = \{A \in K^{n \times n} \, / \, A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n \times n} \, / \, A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $K^{n \times n}$ y $S \oplus T = K^{n \times n}$.

Ejercicio 26. Para cada S dado, hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V):

i) $S = < (1, 2, -1, 3), \, (2, 3, -2, 1), \, (0, 1, 0, 7) >$, $V = \mathbb{R}^4$

ii) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \, / \, \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$

iii) $S = < 3, 1 + X^2 >$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

Ejercicio 27. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists \, v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$

ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, $\dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

$(*)$ **Ejercicio 28.** Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$).

i) Probar que $\forall \, v \notin T$, $T \oplus < v > = V$.

ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.

iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.