COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2005

Práctica 3 - Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2, x_3) = (2.x_1 - 7.x_3,\ 0\ ,\ 3.x_2 + 2.x_3)$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\ 2.x_2,\ 1 + x_1)$

iii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \ f(z) = \overline{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial).

iv) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}.\, a_{22} - a_{12}.\, a_{21}$

v) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

vi) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3,\ \ f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

Ejercicio 2. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

i) $f(x, y) = (x, 0)$

ii) $f(x, y) = (0, y)$

iii) $f(x, y) = (x, -y)$

iv) $f(x, y) = (\frac{1}{2}.(x + y),\ \frac{1}{2}.(x + y))$

v) $f(x, y) = (x. \cos t - y. \operatorname{sen} t\ ,\ x. \operatorname{sen} t + y. \cos\, t)$ con $t \in \mathbb{R}$ fijo.

Ejercicio 3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

i) $tr : K^{n\times n} \to K$

ii) $t : K^{n\times m} \to K^{m\times n},\ \ t(A) = A^t$

iii) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m},\ \ f(A) = B.A$ donde $B \in K^{r\times n}$

iv) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ \ \delta(f) = f'$

v) $\Phi : C([0, 1]) \to C([0, 1]),\ \ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt$

vi) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K,\ \ \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

Ejercicio 4.

i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

ii) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

iii) Sean $f,\, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1,0,1) = (1,2,1), \quad f(2,1,0) = (2,1,0), \quad f(-1,0,0) = (1,2,1),$$
$$g(1,1,1) = (1,1,0), \quad g(3,2,1) = (0,0,1), \quad g(2,2,-1) = (3,-1,2).$$

Determinar si $f = g$.

iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1) = (2,a,-1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2) = (5,-1,-7)$.

Ejercicio 5.

i) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las tranformaciones lineales de los Ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

ii) Clasificar las transformaciones lineales tr, t y ϵ_α del Ejercicio 3 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_1+x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

$(*)$ **Ejercicio 7.** Sean $g : V \to V'$ y $f : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar:

i) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$

ii) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$

iii) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

iv) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$

Ejercicio 8.

i) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

ii) Sean $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,0)$ y $v_3 = (1,1,1,1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

iii) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

iv) Sean S, $T \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios definidos por
$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, 2.x_1 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$.
¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

v) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

(a) $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 = 0\}$, $T = <(1,2,1)>$

(b) $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$, $T = <(1,-2,1)>$

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido.

i) $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$

ii) $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = < (1, 1, 2) >$

iii) $f \neq 0$ y $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$

iv) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$

v) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$

vi) $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

Ejercicio 10. Sea $S = < (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu}(f) = S$.

ii) Hallar ecuaciones para S (usar i)).

iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > + (0, 1, 1, 2)$

Ejercicio 11. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Se define la aplicación $\alpha_B : V \to K^n$ de la siguiente manera:

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad \alpha_B(v) = (x_1, \dots, x_n).$$

Probar que α_B es un isomorfismo.

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B, esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

i) $\{w_1, \dots, w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en K^n

ii) $\{w_1, \dots, w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de K^n

iii) $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_n)\}$ es una base de K^n

Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1,\ X^2 - 3.X + 5,\ 2.X^2 + 2.X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver si $\{(1, -1, 1),\ (1, -3, 5),\ (2, 2, -3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, para lo que se puede usar el método de triangulación.

Ejercicio 12. Sea V un K-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. f se llama un *proyector* si y sólo si $f \circ f = f$.

i) Probar que $f : V \to V$ es un proyector $\iff f(v) = v \quad \forall\, v \in \text{Im}(f)$.

ii) En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido.

(a) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = < (-2, 1, 1) >$
(b) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 3.x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = < (1, 1, 1) >$

iii) Sea V un K-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

iv) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$.

Ejercicio 13. Dada $f : V \to V$, calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3.x_1 - 2.x_2 + x_3,\ 5.x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + 3.x_2 + 4.x_3)$

(a) $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.

ii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - i.x_2,\ x_1 + x_2)$

(a) $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

(b) $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

iii) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$

(a) $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.

(b) $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.

iv) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicio 14. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Hallar $f(3.v_1 + 2.v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

ii) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

iii) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3.w_3 - w_4)$.

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifique:

i) $A \neq I_3$ y $A^3 = I_3$

ii) $A \neq 0$, $A \neq I_3$ y $A^2 = A$

Ejercicio 16. Mostrar, en cada uno de los siguientes casos, una matriz A con coeficientes reales de manera que el sistema $A.x = b$ cumpla:

i) No tiene solución o tiene solución única, dependiendo del valor de b.

ii) Tiene infinitas soluciones, independientemente del valor de b.

iii) No tiene solución o tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor de b.

iv) Tiene solución única, independientemente del valor de b.

Ejercicio 17. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j;\ \ i \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: Recordar que, si f es un proyector, $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.)

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2.x_1 - 3.x_2 + 2.x_3, 3.x_1 - 2.x_2 + x_3).$$

i) Determinar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices inversibles C y D tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Calcular el rango de las siguientes matrices:

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 20. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21.

i) Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $S = \{x \in K^n \,/\, A.x = 0\}$. Probar que $\mathrm{rg}(A) + \dim(S) = n$.
(Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes).

ii) Sean $A \in K^{m\times n}$ y $b \in K^m$. Se considera el sistema $A.x = b$ y sea $(A \mid b)$ su matriz ampliada. Probar que $A.x = b$ tiene solución $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b)$.

($*$) **Ejercicio 22.** Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(A.B) \leq \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A.B) \leq \mathrm{rg}(B)$.