COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2006

Práctica 4 - Determinantes

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.

i) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.

ii) Calcular el determinante de $A \in K^{n\times n}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.

i) Si $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$ y $C \in K^{n\times m}$, sea $M \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A).\det(B)$.

ii) Hallar una matriz $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ de la forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con A, B, C y D en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\det(M) \neq \det(A).\det(D) - \det(B).\det(C)$.

iii) Sean $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ y para cada i, $1 \le i \le n$, sea $A_i \in K^{r_i\times r_i}$. Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Calcular $\det(M)$.

Ejercicio 4. Calcular el determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Dada la matriz de *Vandermonde*:

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

probar que $\det(V(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \prod_{1\le i<j\le n} (k_j - k_i)$.

Ejercicio 6. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Dadas las matrices A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $A.C = C.B$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

Ejercicio 8. Sean $v_1 = (a, b, c)$ y $v_2 = (d, e, f)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por

$$\varphi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

i) Probar que φ es una transformación lineal.

ii) Probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\varphi(x, y, z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $< v_1, v_2 >$.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\det(A + B) = \det(A - B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $B_{11} \neq B_{21}$.

Ejercicio 10.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$
Probar que el sistema $A.x = 0$ tiene solución única si y sólo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Ejercicio 11. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita. (Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.)

Ejercicio 12. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

Ejercicio 13. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{R}$ empleando la regla de Cramer:

i) $\begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2.x_3 = 1 \\ 2.x_1 + x_2 + 4.x_3 = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2.x_2 - 4.x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5.x_1 + x_2 - 3.x_3 + 2.x_4 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 14. Dadas las funciones reales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ que satisfacen
$$\begin{cases} x_1(t) + t.\, x_2(t) + t^2.\, x_3(t) = t^4 \\ t^2.\, x_1(t) + x_2(t) + t.\, x_3(t) = t^3 \\ t.\, x_1(t) + t^2.\, x_2(t) + x_3(t) = 0 \end{cases}$$
calcular $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)$.

Ejercicio 15. Sea $A \in K^{3\times 3}$ no inversible tal que $A_{11}.A_{33} - A_{13}.A_{31} \neq 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in K^3 / \, A.x = 0\}$.

Ejercicio 16.

i) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible. Calcular $\det(\operatorname{adj}(A))$.

ii) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz tal que $\operatorname{rg}(A) < n-1$. Probar que $\operatorname{adj}(A) = 0$.

(∗) iii) Sea $A \in K^{n\times n}$ tal que $\operatorname{rg}(A) = n-1$. Probar que $\operatorname{rg}(\operatorname{adj}(A)) = 1$.