

## COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2006

## Práctica 6 - Forma de Jordan

**Ejercicio 1.** Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz  $A \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2.** Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ , donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

**Ejercicio 3.** Dadas las matrices  $A$  y  $A'$  en  $K^{6 \times 6}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Probar que ambas son nilpotentes y que  $A$  es semejante a  $A'$ .
- ii) Dar bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}_5[X]$  tales que la matriz de la derivación en la base  $B$  sea  $A$  y en la base  $B'$  sea  $A'$ .
- iii) Calcular  $A^k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  una matriz nilpotente tal que  $A^5 \neq 0$  y sea  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  una base de Jordan para  $A$ . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$  y  $A^5$ .

**Ejercicio 5.**

- i) Decidir si existe  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  nilpotente tal que  $\text{rg}(A) = 6$ ,  $\text{rg}(A^2) = 4$ ,  $\text{rg}(A^3) = 3$ ,  $\text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- ii) Decidir si existe  $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$  tal que  $\text{rg}(A) = 9$ ,  $\text{rg}(A^2) = 5$ ,  $\text{rg}(A^3) = 3$ ,  $\text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

**Ejercicio 6.** Hallar la forma y una base de Jordan de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{v) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vi) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{vii) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{viii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 7.** Sea  $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$  el subespacio  $V = \langle e^x, x \cdot e^x, x^2 \cdot e^x, e^{2x} \rangle$ . Sea  $t : V \rightarrow V$  la transformación lineal definida por  $t(f) = f'$ . Hallar la forma y una base de Jordan para  $t$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , hallar la forma y una base de Jordan de  $A$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$  una matriz con autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda_1 I) &= 13, & \text{rg}(A - \lambda_1 I)^2 &= 11, & \text{rg}(A - \lambda_1 I)^3 &= 10, & \text{rg}(A - \lambda_1 I)^4 &= 10 \\ \text{rg}(A - \lambda_2 I) &= 13, & \text{rg}(A - \lambda_2 I)^2 &= 11, & \text{rg}(A - \lambda_2 I)^3 &= 10, & \text{rg}(A - \lambda_2 I)^4 &= 9, \\ \text{rg}(A - \lambda_3 I) &= 13, & \text{rg}(A - \lambda_3 I)^2 &= 12, & \text{rg}(A - \lambda_3 I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

**Ejercicio 10.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean  $A$ -invariantes.

**Ejercicio 11.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Hallar la forma y una base de Jordan para  $A$ .
- ii) Calcular  $A^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 12.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si  $A$  y  $B$  son semejantes.

**Ejercicio 13.** Si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sea  $J(\lambda, n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  la matriz

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

- i) Calcular  $J(\lambda, n)^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.  
Sugerencia:  $J(\lambda, n) = \lambda I_n + J(0, n)$ .
- ii) Verificar que  $\text{rg}(J(\lambda, n)^k - \lambda^k I_n) = n - 1$  para  $\lambda \neq 0$ .
- iii) Si  $\lambda \neq 0$ , hallar la forma de Jordan de  $J(\lambda, n)^k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 14.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, & a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4.a_{n+1} - 4.a_n & \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

Sugerencia: Ver el Ejercicio 9 de la Práctica 5.

**Ejercicio 15.** Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ .

**Ejercicio 16.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- i) Calcular  $e^{At}$  para  $t \in \mathbb{R}$ .
- ii) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -1$ ,  $z(0) = 2$ .