

## COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2006

### Práctica 7 - Espacios vectoriales con producto interno

**Ejercicio 1.** Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iii)  $\Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

iv)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + x_2.\bar{y}_2 - x_1.\bar{y}_2 - x_2.\bar{y}_1$

v)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + (1+i).x_1.\bar{y}_2 + (1+i).x_2.\bar{y}_1 + 3.x_2.\bar{y}_2$

vi)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = x_1.\bar{y}_1 - i.x_1.\bar{y}_2 + i.x_2.\bar{y}_1 + 2.x_2.\bar{y}_2$

vii)  $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + x_3.\bar{y}_3 - x_1.\bar{y}_3 - x_3.\bar{y}_1$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

viii)  $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K$ ,  $\Phi(x, y) = 3.x_1.\bar{y}_1 + x_2.\bar{y}_1 + 2.x_2.\bar{y}_2 + x_1.\bar{y}_2 + x_3.\bar{y}_3$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 2.**

i) Sea  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$ .

a) Probar que  $\Phi$  es un producto interno.

b) Encontrar una base de  $\mathbb{R}^2$  que sea ortonormal para  $\Phi$ .

ii) Encontrar una base de  $\mathbb{C}^2$  que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 1. vi).

**Ejercicio 3.** En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en  $V$  para el cual la base  $B$  resulte ortonormal.

i)  $V = \mathbb{R}^2$  y  $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

ii)  $V = \mathbb{C}^2$  y  $B = \{(1, i), (-1, i)\}$

iii)  $V = \mathbb{R}^3$  y  $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

iv)  $V = \mathbb{C}^3$  y  $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

**Ejercicio 4.** Determinar para qué valores de  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$  la función  $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1+b).x_3.y_3$$

es un producto interno en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejercicio 5.** Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

- i)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K$ ,  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$
- ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$
- iii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K$ ,  $\langle x, y \rangle = \bar{y} \cdot Q^* \cdot Q \cdot x^t$   
donde  $Q \in K^{n \times n}$  es una matriz inversible, con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 6.** Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a  $\mathbb{R}_n[X]$  y calcular su matriz en la base  $B = \{1, X, \dots, X^n\}$ .

**Ejercicio 7.** Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de  $V$ :

- i)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2 \cdot x_1 - x_2 = 0\}$   
para el producto interno canónico.
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$ 
  - a) Para el producto interno canónico.
  - b) Para el producto interno definido por  $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$ .
- iii)  $V = \mathbb{C}^3$ ,  $S_3 = \langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle$  para el producto interno canónico
- iv)  $V = \mathbb{C}^4$ ,  $S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2i \cdot x_2 - x_3 + (1+i) \cdot x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i) \cdot x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$   
para el producto interno  $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot \bar{y}_1 + 2 \cdot x_2 \cdot \bar{y}_2 + x_3 \cdot \bar{y}_3 + 3 \cdot x_4 \cdot \bar{y}_4$ .
- v)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S_5 = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle$  para el producto interno canónico.

**Ejercicio 8.**

- i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.
- ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.
- iii) Hallar el punto de  $S_5$  más cercano a  $(0, 1, 1, 0)$ . Calcular la distancia de  $(0, 1, 1, 0)$  a  $S_5$ .

**Ejercicio 9.**

- i) Se considera  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$  con el producto interno  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$ . Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
- ii) Se considera  $\mathbb{R}_3[X]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$ .
  - a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base  $\{1, X, X^2, X^3\}$ .
  - b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio  $S = \langle 1 \rangle$ .

iii) Se considera  $C[-1, 1]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x) dx$ . Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ .

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio  $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \text{sen}(\pi x) \rangle$ .

iv) Se considera  $C[0, \pi]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t).g(t) dt$ .

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base  $B = \{1, \cos t, \text{sen } t\}$ .

b) Sea  $S$  el subespacio de  $C[0, \pi]$  generado por  $B$ . Hallar el elemento de  $S$  más próximo a la función  $f(x) = x$ .

**Ejercicio 10.** Calcular  $f^*$  para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii)  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

iii)  $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv)  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ ,  $f(p) = p'$ , donde  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x) dx$ .

v)  $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $f(A) = P^{-1}.A.P$ , donde  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  inversible y  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A.B^*)$ .

vi)  $\mu_f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $\mu_f(p) = f.p$ , donde  $f \in \mathbb{R}[X]$  y  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x) dx$ .

**Ejercicio 11.** Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Probar que  $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $S$  un subespacio de  $V$ . Probar que la proyección ortogonal  $P : V \rightarrow V$  sobre  $S$  es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

**Ejercicio 13.**

i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz  $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal tal que  $O.A.O^t$  sea diagonal:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ii) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitaria tal que  $U.A.U^*$  sea diagonal:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 14.** Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{3}$ .
- ii)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , simetría respecto de la recta de ecuación  $x_1 - x_2 = 0$
- iii)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , simetría respecto del plano de ecuación  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$
- iv)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  y eje  $\langle (1, 0, 1) \rangle$ .

**Ejercicio 15.** Dada la transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

decidir si  $f$  es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

**Ejercicio 16.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

- i) Probar que  $f$  es una rotación.
- ii) Hallar  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $g \circ g = f$ .

## Aplicación del producto interno y del determinante al cálculo de volúmenes

Consideremos  $\mathbb{R}^n$  con el producto interno canónico  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

El área del paralelogramo  $P(v_1, v_2)$  que definen dos vectores  $v_1$  y  $v_2$  linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  se puede calcular con la fórmula “base por altura”, o sea

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\|.$$

El volumen del paralelepípedo  $P(v_1, v_2, v_3)$  que definen tres vectores  $v_1, v_2, v_3$  linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  sería “área de la base por altura”, o sea

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\|.$$

Si esto se generaliza a  $k$  vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ , el volumen del paralelepípedo  $P(v_1, \dots, v_k)$  sería

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\| \cdots \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|.$$

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo  $P(v_1, \dots, v_k)$  definido por los vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  como:

$$\begin{cases} \text{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \text{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Demostrando los ítems i), ii) y iii) siguientes, se prueba que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_n$  en  $\mathbb{R}^n$  es igual a  $|\det(A)|$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ .

Dados  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  se define la matriz  $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$  como

$$G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle.$$

i) Probar que:

- $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$ .
- $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|v_k\|^2$ .
- $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|^2$ .

ii) Probar que, si  $v_1, \dots, v_k$  son vectores linealmente independientes,

$$(\text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k)).$$

iii) Sean  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  linealmente independientes y sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ .

- Probar que  $G(v_1, \dots, v_n) = A^t \cdot A$ .
- Deducir que  $\text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$ .

iv) a) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores  $(2, 1)$  y  $(-4, 5)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

b) Calcular el volumen del paralelepípedo definido por  $(1, 1, 3)$ ,  $(1, 2, -1)$  y  $(1, 4, 1)$  en  $\mathbb{R}^3$ .

v) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo. Probar que, si  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  son linealmente independientes,

$$\text{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f| \cdot \text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)).$$