Complementos de Matemática III

PRACTICA 1. MATRICES Y DETERMINANTES.

1. Encuentre un contraejemplo para cada uno de las siguiente afirmaciones relativas al producto de matrices:

   (i) $AB = BA$

   (ii) $(AB)^2 = A^2B^2$

   (iii) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

   (iv) $AB = AC$ y $\mathrm{A} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}$

   (v) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$

   (vi) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

   (vii) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I$.

2. Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathbb{K}^{3\times 3} / \, AB = BA \;\; \forall B \in \mathbb{K}^{3\times 3}\}$.

3. Calcular:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n.$$

4. Resolver las ecuaciones matriciales en el cuerpo $\mathbb{R}$:
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifique:

   (i) $A \neq I$ y $A^3 = I$

   (ii) $A \neq 0$; $A \neq I$ y $A^2 = A$.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

   (i) Probar que $A = 0$ si y sólo si $\mathrm{tr}(A.A^t) = 0$.

   (ii) Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son simétricas. ¿$A.A^t = A^t.A$?

   (iii) ¿La suma de dos matrices simétricas es simétrica? ¿Y el producto?

7. Sea $A \in K^{2\times 2}$ y sea $P \in K[x]$, $P(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A).x + \det(A)$. Probar que $P(A) = A^2 - \mathrm{tr}(A).A + \det(A).I_2 = 0$ para cada una de las siguientes matrices
$$\text{(a)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\text{i)}\ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)}\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{v)}\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{vi)}\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

9. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} \quad d)\ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad g)\ \begin{pmatrix} 0 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

donde $\omega = \cos(\frac{2}{3}\pi) + i\ \sin(\frac{2}{3}\pi)$.

10. Dados n números (o elementos de un cuerpo cualquiera) $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$, se llama determinante de Vandermonde al determinante formado poniendo en la fila i a las potencias de a_i:

$$V(a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n) \;=\; det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular $V(a_1,\ a_2)$, $V(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $V(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$. Adivinar una fórmula general.

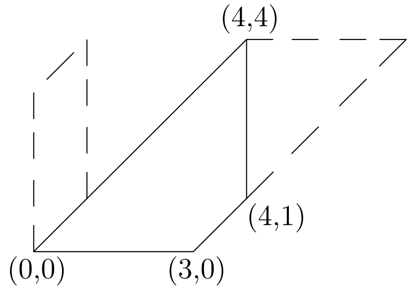
11. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{(n-1)2} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

donde $\epsilon = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\text{sen}(\frac{2\pi}{n})$.

12. Calcular usando determinantes:

(i) El área del cuadrilátero de vértices (0, 0), (3, 0), (4, 1), (4, 4).
Sugerencia:



(ii) El volumen del paralelepípedo que tiene a (0, 2, 0), (0, 0, 0), (2, 0, 0), (1, 1, 5) como vértices adyacentes.

13. (*) Ejercicio fuera de programa

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -10 & 13 & 14 & 15 \\ 12 & -9 & 14 & 15 \\ 12 & 13 & -8 & 15 \end{pmatrix}$$

i) Comprobar que $\det(A) = 10648$.

ii) Hallar los cuerpos $\mathbb{Z}_p$ tales que A no es inversible.

iii) Hallar soluciones no triviales del sistema $Ax = 0$ en los cuerpos hallados en ii) donde $x \in \mathbb{Z}_p^4$.

iv) Encontrar el rango de A en esos cuerpos.

14. **Matrices elementales.** Las matrices elementales son el resultado de aplicarle una operación elemental a la matriz identidad I.

(i) Calcular todas las matrices elementales de $K^{3\times 3}$.

(ii) Las matrices elementales son inversibles.

(iii) Calcular el determinante de las matrices elementales.

(iv) Sea α una operación elemental de filas, β una operación elemental de columnas, $P = \alpha(I)$ y $Q = \beta(I)$ las correspondientes matrices elementales. Dada una matriz A, verificar, demostrar o convencerse que se tiene $\alpha(A) = PA$, es decir, $\alpha(A) = \alpha(I)A$, y $\beta(A) = AQ$, es decir, $\beta(A) = A\beta(I)$.

(v) Deducir que si B proviene de A luego de una aplicación sucesiva de operaciones elementales de filas y de columnas, se tiene $B = PAQ$, donde P resulta de aplicarle las operaciones de fila a I, y Q resulta de aplicarle las operaciones de columna a I.

(vi) Las matrices P, Q en el item anterior son inversibles.

15. Para las siguientes matrices A, B sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ decidir si existen matrices inversibles P, Q tales que $B = PAQ$, y en caso afirmativo hallarlas.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

16. **Matrices escalonadas.** Una matriz es *escalonada* si verifica lo siguiente:

 1) El primer coeficiente no nulo de cada fila es 1, y se llama el *pivote* de la fila.

 2) El pivote de cada fila (a partir de la segunda) se encuentra estrictamente más lejos (es decir, en una columna de índice estrictamente mayor) que el pivote de la fila anterior.

 3) Puede tener abajo un cierto número de filas nulas.

 4) Una matriz escalonada se dice *reducida* si la columna arriba de cada pivote también es de ceros.

 Observar que en una matriz escalonada de n columnas y k pivotes, las primeras k filas son independientes (y son las unicas no nulas). Hay k columnas que tienen pivote, son independientes, y generan todas las columnas. Hay $n - k$ columnas que no tienen pivote.

 Toda matriz puede llevarse por operaciones elementales de filas a la forma escalonada. El algoritmo para hacerlo se llama método de Gauss o del "pivote".

 Una matriz *ampliada* es simplemente una matriz dividida en dos bloques $(A\,|B)$.

17. El rango de una matriz escalonada es igual a su número de filas no nulas. El algoritmo de Gauss no modifica el rango de una matriz. Calcular el rango de las siguientes matrices, por ejemplo, llevándolas a la forma escalonada.

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad vi) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

19. **Cálculo de determinantes por el algoritmo de Gauss:**

    (i) Observar que luego de una operación elemental, el determinante no cambia, cambia de signo, o queda multiplicado por un escalar ($\neq 0$), según sea el caso.

    (ii) El determinante de una matriz escalonada cuadrada es el producto de los elementos de la diagonal.

    (iii) Deducir de los dos items anteriores un método para calcular determinantes por medio del algoritmo de Gauss, y calcular con este método los determinantes del ejercicio 8 (notar que en cuanto aparezca una columna sin pivote el determinante es nulo).

20. **Método algorítmico para calcular la inversa de una matriz.** Dada una matriz A, su inversa se calcula eficientemente con el siguiente ALGORITMO:

    1) Formar la matriz ampliada $(A\,|I)$.

    2) Operando sobre la matriz ampliada llevar por el método de Gauss el bloque A a la forma escalonada. Si aparece una columna sin pivote, la matriz no es inversible.

    3) Continuar fabricando ceros, ahora arriba de la diagonal, hasta obtener una matriz de la forma $(I\,|B)$.

    Por el ejercicio 11. se tiene que $BA = I$, con B inversible, de donde se sigue que B es la inversa de A.

21. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Escribir, si es posible, A y B como producto de matrices elementales. Calcular de ser posible A^{-1} y B^{-1} usando esta escritura.

22. **Otro método para calcular la inversa de una matriz.** Enfrentado a una matriz A, en la mayoría de los casos su inversa puede calcularse mas rapido pero con mas riesgo de la siguiente forma (que no es un algoritmo, y por lo tanto hay que pensar, actividad que a veces es preferible evitar).

    1) Formar la matriz ampliada $(I\,|A\,|I)$.

    2) Ir fabricando ceros en el bloque del centro hasta llegar a la matriz identidad I. Para ello, observarlo bien, y astutamente decidirse por una operación, ya sea de fila o de columna. Si se realiza una operación de fila, hacer la misma operación en el bloque izquierdo, y dejar el derecho como está. Si se realiza una operación de columna, hacer la misma operación en el bloque derecho, y dejar el izquierdo como está.

    3) Con un poco de suerte, se termina obteniendo una matriz de la forma $(P\,|I\,|Q)$.

    Por el ejercicio 10. se tiene que $PAQ = I$, con P y Q inversibles, de donde se sigue que $B = QP$ es la inversa de A.

23. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$a)\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\quad b)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad c)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad d)\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad e)\begin{pmatrix}2&2&-3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$f)\begin{pmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{pmatrix}\quad g)\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&1&0\\2&1&-2&3\\3&1&-1&3\end{pmatrix}\quad h)\begin{pmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\0&a_{22}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\quad i)\begin{pmatrix}2&1&3&1&2\\0&5&-1&8&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$j)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\qquad k)\begin{pmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{pmatrix}\qquad l)\begin{pmatrix}-1&1&6&5\\1&1&2&3\\-1&2&5&4\\2&1&0&1\end{pmatrix}.$$

24. Sea A nilpotente ($A^n = 0$). Demostrar que $I - A$ es inversible.
(pista: recordar la serie de $\frac{1}{1-x}$).

25. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar:

    (i) Si A es inversible entonces $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ y $AB = AC \Rightarrow B = C$
    (ii) Si A no es inversible, existe $B \neq 0, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $AB = 0$.
    (iii) A, B inversibles $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

26. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

    (i) $A\,,\,B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible
    (ii) A inversible $\iff$ A^t inversible.
    (iii) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N}\ /\ A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

    Nota: Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se llama **matriz transpuesta de** A a la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definida por $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}, \forall\, 1 \le i, j \le n$.