1er. cuatrimestre 2007

Complementos de Matemática III

PRACTICA 2.

RESOLUCIóN DE SISTEMAS LINEALES.

Matrices escalonadas

Una matriz es *escalonada* si verifica lo siguiente:

1) El primer coeficiente no nulo de cada fila es 1, y se llama el *pivote* de la fila.

2) El pivote de cada fila (a partir de la segunda) se encuentra estrictamente mas lejos (es decir, en una columna de índice estrictamente mayor) que el pivote de la fila anterior.

3) Puede tener abajo un cierto numero de filas nulas.

4) Una matriz escalonada se dice *reducida* si la columna arriba de cada pivote tambien es de ceros.

Observar que en una matriz escalonada de n columnas y k pivotes, las primeras k filas son independientes (y son las únicas no nulas). Hay k columnas que tienen pivote, son independientes, y generan todas las columnas. Hay $n-k$ columnas que no tienen pivote.

Toda matriz puede llevarse por operaciones elementales de filas a la forma escalonada. El algoritmo para hacerlo se llama metodo de Gauss o del "pivote".

Una matriz *ampliada* es simplemente una matriz dividida en dos bloques $(A\,|B)$.

Sistemas de ecuaciones lineales

El conjunto S de soluciones de un sistema lineal homogéneo con n variables es un subespacio del espacio K^n. Resolver el sistema homogéneo consiste en hallar una base para S. Toda solución será entonces combinación lineal de las soluciones de la base.

El conjunto de soluciones A de un sistema no homogéneo es un transladado $A = p_0 + S$ del conjunto de soluciones S del sistema homogéneo correspondiente, donde p_0 es una solución particular cualquiera. Resolver el sistema consiste en hallar p_0 y en resolver el sistema homogéneo.

METODO PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES:

Los sistemas lineales tienen una matriz ampliada asociada, por ejemplo, la matriz asociada al sistema en el ejercicio 1. a) aquíabajo es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & | & 4 \\ 3 & 4 & -2 & | & 11 \\ 3 & -2 & 4 & | & 11 \end{array}\right)$$

Así, las filas corresponden a las ecuaciones, las columnas corresponden a las variables, y la columna ampliada a los términos independientes.

Si se aplican operaciones elementales de filas, la matriz resultante corresponde a un sistema que tiene el mismo conjunto de soluciones.

COROLARIO (del método de Gauss): Dado cualquier sistema lineal, existe un sistema lineal escalonado (es decir, cuya matriz es escalonada) que tiene el mismo conjunto de soluciones.

El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo escalonado de m ecuaciones (y n variables) tiene dimension $n - m$, y una base se encuentra immediatamente.

El metodo para resolver sistemas es llevarlos a la forma escalonada. Los sistemas se resuelven por medio del siguiente ALGORITMO:

Supongamos n variables con m ecuaciones:

1) Se escribe la matriz ampliada asociada $(A,\ b)$.

2) Por medio del método de Gauss aplicado a la matriz ampliada se lleva la parte A a la forma escalonada, que tendrá $k \leq m$ pivotes (aparecen filas nulas abajo si $k < m$).

3) Las variables correspondientes a las $n - k$ columnas sin pivote se pasan al otro lado, y se piensan como parámetros independientes. Así, el espacio de soluciones del sistema homogéneo tendrá dimensión $n - k$.

4) Se resuelve el sistema escalonado empezando desde abajo (si a la columna ampliada le queda un número no nulo debajo de la fila k, el sistema no tiene soluciones).

5) Notar que esta última parte es equivalente a continuar fabricando ceros, ahora arriba de cada pivote, quedando asíuna matriz escalonada reducida, cuyo sistema "ya está resuelto". Se tiene asíla solución general (en término de los parámetros).

6) Dándole el valor cero a todos los parámetros se obtiene una solución particular p_0.

7) Para obtener $n - k$ soluciones independientes del sistema homogéneo correspondiente se les van dando valores arbritrarios convenientes a los $n - k$ parámetros (por ejemplo, un parámetro $= 1$ y todos los demás $= 0$, y asíen forma sucesiva con cada parámetro).

El conjunto de soluciones así obtenido es el conjunto de soluciones del sistema original.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 11 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 1 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = & 14 \end{array}\right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = & 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 & = & 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 & = & -3 \end{array}\right. \qquad f)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 & = & 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$g)\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 & = & 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array}\right. \qquad h)\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 & = & -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_6 & = & 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 & = & 12 \end{array}\right.$$

2. Resuelva los siguientes sistemas y compare los conjuntos de soluciones:

$$\text{i) } \{x+2y-3z = 4 \qquad \text{ii) } \left\{\begin{array}{rcr} x + 2y - 3z & = & 4 \\ x + 3y + z & = & 11 \end{array}\right. \qquad \text{iii) } \left\{\begin{array}{rcr} x + 2y - 3z & = & 4 \\ x + 3y + z & = & 11 \\ 2x + 5y - 4z & = & 13 \end{array}\right.$$

3. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)}\left\{\begin{array}{rl} x_1 + kx_2 + x_3 & = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 & = 0 \\ (k^2-4)x_3 & = 0 \end{array}\right. \qquad \text{ii)}\left\{\begin{array}{rl} x_1 + kx_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = 0 \end{array}\right.$$

4. Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = \alpha_3 \end{array}\right.$$

Determinar los valores de α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

5. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)}\left\{\begin{array}{rl} ax_1 + x_2 + x_3 & = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = -1 \end{array}\right. \qquad \text{ii)}\left\{\begin{array}{rl} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = b \end{array}\right.$$

6. (i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Probar que el sistema homogéneo correspondiente tiene solución única si y sólo si a , b , c y d no son todos iguales a cero.

(ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

7. Encuentre un sistema con coeficientes reales cuya solución general sea

$$\{(1,1,0) + \lambda(1,2,1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$