

COMPLEMENTOS DE MATEMATICA III

PRACTICA 5. AUTOVALORES y AUTOVECTORES
MATRICES SEMEJANTES

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos:

(Analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$)

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\text{iv) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{v) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{viii) } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar dos matrices distintas P tales que $P^{-1}AP = \text{Diagonal}$.
 ¿Debe ser siempre la diagonal la misma?

3. Sea $A \in K^{n \times n}$.

- (i) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.
 (ii) Probar que si A es inversible, entonces 0 no es autovalor de A ; y si x es un autovector de A , entonces x es un autovector de A^{-1} .
4. Para cada una de las matrices A del ejercicio 1, sea E la base canonica de K^n y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ la transformación lineal tal que $[f]_E = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $[f]_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular C_{BE} y C_{EB} .
5. (i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con autovalores $1/2, 1/3$ y $1/5$. Probar que $A^n \rightarrow 0$ (i.e. $a_{ij}^n \rightarrow 0 \quad \forall i, j$).
 (ii) Buscar un enunciado general del cual este caso sea un ejemplo.

Nota: Para i) usar que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

(i) Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 tal que $|f|_B$ sea diagonal.

(ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Dar ejemplos de matrices (2×2) que tengan los mismos autovalores y que no sean semejantes.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n} / A^2 + I = 0$. Demostrar:

(i) A es no singular.

(ii) n es par.

(iii) A no tiene autovalores reales.

(iv) Hallar un ejemplo para $n = 2$ y otro para $n = 4$.

9. Sea $A \in K^{2 \times 2}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Demostrar:

(i) Si $a \neq c$ entonces A es diagonalizable sobre K .

(ii) Si $a = c$ encontrar todos los b tales que A sea diagonalizable sobre K .

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Probar que $A^n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$ donde los a_i son la sucesión de Fibonacci.

Es decir, (*) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

(ii) Sean $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $B = \begin{pmatrix} -\lambda_2/5 & 1/5 \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$. Entonces $\det(B) = 1$ y

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1/5 \\ \sqrt{5}\lambda_1 & \lambda_2/5 \end{pmatrix}. \text{ Además } A = B^{-1}DB \text{ donde } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Deducir $A^n = B^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} B$. Ello da una solución para la ecuación

(*), $a_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}$. Deducir que los números de Fibonacci satisfacen la fórmula asintótica

$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$. (Se puede saber como crecen cuando $n \rightarrow \infty$)

11. Sea $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ infinitamente derivables}\}$. Considerar el operador derivada $\frac{d}{dx} : V \rightarrow V$. Mostrar que todo número real es un autovalor y exhibir un autovector correspondiente. ¿Por qué se pide infinitamente derivables y no simplemente derivables?