COMPLEMENTOS DE MATEMATICA III

PRACTICA 6

1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ las raíces del polinomio característico de A contadas con multiplicidad.

   (a) Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   (b) Probar que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

2. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

   (a) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

   (d) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

3. Dada $A \in K^{n\times n}$ y $\varphi \in K[t]$ / $\varphi(A) = 0$, puede utilizarse φ para encontrar distintas potencias de A. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \varphi(t) = t^3 - 3t^2 - 7t - 11$$

   Entonces, $A^{-1} = \frac{1}{11}(A^2 - 3A - 7I)$, $A^3 = 3A^2 + 7A + 11I$. Verificarlo. Calcular A^{-2}.

   Nota: $\varphi(A) = 0$ porque φ es el polinomio característico de A.

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular como en el ejercicio 3: A^2 , A^3 , A^{-1} , A^{-2} , A^{-3}.

5. Probar que: A es inversible $\Leftrightarrow \chi_A(0) \neq 0$.

6. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

7. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$$

(a) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio S_i de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_i) = i$ que sea f-invariante.

(b) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = Ax$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$, f_A-invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

9. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A-invariantes.

10. Demostrar que las matrices nilpotentes siguientes son semejantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Dar una base de $K_{<n}[t]$ donde el operador derivada tenga la matriz A y otra en la que tenga la matriz B. (A y B del ejercicio anterior).

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los subespacios invariantes de A considerando:

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(b) $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

13. Encontrar la forma y base de Jordan del operador dado por la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Decir cuantos bloques de Jordan tiene y cuál es la dimensión de cada uno.

14. Hacer lo mismo para: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$.

15. Hallar la base de Jordan del operador dado por las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que encontrar las bases de Jordan es equivalente a encontrar la matriz P tal que $P^{-1}AP = J$, con J en forma de Jordan.

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   i) Hallar la forma y una base de Jordan para A.

   ii) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

17. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Encontrar la forma y base de Jordan de A.

19. Sea A la rotación de $\frac{\pi}{2}$ en $\mathbb{R}^2$. Diagonalizar en $\mathbb{C}$.

20. Sea T un proyector (ie $T^2 = T$). Encontrar la forma de Jordan de T. Observar que existe cualquiera sea el cuerpo K. ?‘Por qué?