MATEMATICA 2 (Complementos de Matemática 3)

Verano 2009

Práctica 1 - Repaso de matrices y de sistemas de ecuaciones lineales

En todas las prácticas, $K = \mathbb{R}$ (los números reales) o $\mathbb{C}$ (los números complejos)

Ejercicio 1. Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -\mathrm{Id}$.

Ejercicio 2.

- Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Mostrar un contrajemplo para cada una de las siguientes afirmaciones (que son por lo tantos todas falsas sin más hipótesis sobre las matrices A, B, C):
  1. $(AB)^2 = A^2B^2$
  2. $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
  3. $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
  4. $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$
  5. $A^j = 0$ para algún $j \geq 2 \Rightarrow A = 0$
  6. $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = \mathrm{Id}$
- Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que:
  1. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
  2. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

Ejercicio 3. Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{3\times 3} / \, AB = BA \, , \forall B \in K^{3\times 3}\}$.

Ejercicio 4. ¿Es cierto que el producto de dos matrices en $K^{n\times n}$ triangulares superiores (resp. inferiores) es triangular superior (resp. inferior)?

Ejercicio 5. Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B, AB tiene una fila de ceros? (siempre que AB esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

Ejercicio 6. Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y sean B, $C \in K^{n\times m}$. Probar:

i) $AB = AC \Rightarrow B = C$

ii) $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

Ejercicio 7. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa para matrices A, $B \in K^{n\times n}$. Justificar:

1. A, B inversibles $\Rightarrow A + B$ inversible
2. A nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \, / \, A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

Ejercicio 8. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales ($K = \mathbb{R}$):

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = & 6 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \text{iv)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 3 \end{cases}$$

¿Cambia algo si $K = \mathbb{C}$?

Ejercicio 9. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 1 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 4 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases} \qquad \text{iv)} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = & \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & \beta \\ x_1 + 4x_2 - x_3 & = & \gamma, \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Verificar que en cada caso, el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual a una solución particular más el conjunto de soluciones del homogéneo asociado.

Ejercicio 10. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$.

Ejercicio 11. Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & \alpha \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & \beta \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & \gamma \end{cases}$$

Determinar los valores de α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

Ejercicio 12. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)} \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = & -1 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = & 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = & -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = & b \end{cases}$$

Ejercicio 13. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

v) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

vi) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Ejercicio 14. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial (i.e. no nula):

i) $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 & = & 0 \\ (k^2-4)x_3 & = & 0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = & 0 \end{cases}$