

MATEMÁTICA 2 (Complementos de Matemática 3)
Verano 2009

Práctica 3 - Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$
2. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, considerando a \mathbb{C} como \mathbb{C} -espacio vectorial y como \mathbb{R} -espacio vectorial.
3. $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
4. $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
5. $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(f) = (f(0), f'(0), f''(0))$

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

1. $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$, $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$
2. $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$, $f(A) = BA$ donde $B \in K^{r \times n}$ está dado
3. $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$
4. $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$
5. $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

Ejercicio 3.

1. Justificar que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$, y que es única. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.
2. ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?
3. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (1, 2, 1), & f(2, 1, 0) &= (2, 1, 0), & f(-1, 0, 0) &= (1, 2, 1), \\ g(1, 1, 1) &= (1, 1, 0), & g(3, 2, 1) &= (0, 0, 1), & g(2, 2, -1) &= (3, -1, 2). \end{aligned}$$

Determinar si $f = g$.

4. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

Ejercicio 4.

1. Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales del Ejercicio 1. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1} .
2. Clasificar las transformaciones lineales tr y ϵ_α del Ejercicio 2 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4)$$

1. Calcular $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$
2. Calcular $f^{-1}(2, 0, 6)$

Ejercicio 6. Sea $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu}(f) = S$
2. Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + (0, 1, 1, 2)$

Ejercicio 7. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8.

1. ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$?,
¿Y un monomorfismo $f : \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : tr(A) = 0\} \rightarrow \{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(1) = f'(1) = 0\}$?
2. Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{Im}(f)$?
3. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios definidos por
 $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$.
¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?
4. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que satisfaga $\text{Nu}(f) = S$ e $\text{Im}(f) = T$ en los siguientes casos:
 - (a) $S = \langle (1, 2, 1) \rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$,
 - (b) $S = \langle (1, -2, 1) \rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$,

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido

1. $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$
2. $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$
3. $f \neq 0$ y $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$
4. $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
5. $f \neq \text{Id}$ y $f \circ f = \text{Id}$
6. $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

Ejercicio 10. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular $g \circ f$. También las matrices correspondientes a f , g y $g \circ f$ con respecto a las bases canónicas, el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 11.

1. Mostrar que la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi)$ con $\phi \in \mathbb{R}$ fijo es una rotación (de ángulo ϕ radianes).
2. Para $\phi = \pi$ calcular f^2
3. Hallar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \neq \text{Id}$, tal que $f^3 = \text{Id}$
4. Hallar $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A \neq \text{Id}$ tal que $A^3 = \text{Id}$ ¿Y en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(*) **Ejercicio 12.** Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times r}$. Probar que $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$ y $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B)$.

Ejercicio 13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

y sean las bases $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)\}$ de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 respectivamente.

1. Calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$
2. Calcular $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$
3. Calcular las matrices inversibles $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$ donde \mathcal{E} y \mathcal{E}' son las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 respectivamente.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

1. Determinar bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Si A es la matriz de f en la base canónica,

- (a) ¿cuál es el rango de A ?
 (b) encontrar matrices inversibles Q y P tales que

$$QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. ¿Existe una base \mathcal{B}'' de \mathbb{R}^3 para la cual $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? (donde $[f]_{\mathcal{B}''}$ nota $[f]_{\mathcal{B}''\mathcal{B}''}$)

Ejercicio 15. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base \mathcal{B}' ?
- Hallar una base de $\text{Nu}(f)$ y una base de $\text{Im}(f)$.
- Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$

Ejercicio 16. Para las siguientes $f : V \rightarrow V$, calcular $[f]_{\mathcal{E}}$, donde \mathcal{E} es la base canónica

- $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$
- $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$
- $V = \mathbb{C}^2$ como \mathbb{R} -espacio vectorial, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$

Ejercicio 17. Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

- Calcular $[f]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$
- Verificar que f es un isomorfismo
- Exhibir una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$. Probar que f es un proyector (i.e. $f \circ f = f$) y encontrar una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 en la cual $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido

- $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$
- $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

y en caso que sea posible encontrar una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.