MATEMATICA 2 (Complementos de Matemática 3)

Verano 2009

Práctica 4 - Producto interno

En lo que sigue, $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto interno canónico si no está especificado

Ejercicio 1. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en K^n, $n \geq 2$:

1. Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$.
2. Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, $\forall\ u \in K^n$, entonces $v = w$.

Ejercicio 2.

1. Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$.
2. Sea $u = (1, -1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$.
3. Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u\rangle = 0$.
4. Sean $u = (1, 2)$, $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.

Ejercicio 3. Sea la recta $S = \langle(3, 4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

1. El complemento ortogonal $S^\perp$ de S.
2. $p(3, 4)$, $p(-4, 3)$ y $p(2, 1)$.
3. El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3, 4)$, $(-4, 3)$ y $(2, 1)$. y la distancia de esos puntos a la recta S.
4. Una fórmula explícita para $p(x_1, x_2)$ y la matriz $[p]_\mathcal{E}$ de p en la base canónica $\mathcal{E}$.
5. Una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[p]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.

1. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.
2. Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en $\mathcal{B}'$.
3. Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano
$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$
y definir explicitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.

4. Calcular el punto de S más cercano a w, y la distancia que los separa. Idem para v.

Ejercicio 5. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(0, i, 0); (1, 0, i); (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

Ejercicio 6. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre esos subespacios

1. $< (1, 2, 1) > \subseteq \mathbb{R}^3$
2. $\{x \in \mathbb{R}^3 / \, 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
3. $< (i, 1, 1), (-1, 0, i) > \subseteq \mathbb{C}^3$
4. $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4.$

Ejercicio 7. Sea $S =< (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) > \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$, y la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S.

Ejercicio 8.

1. En $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A\overline{B^t})$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales, i.e. las matrices con coeficientes todos nulos fuera de la diagonal principal.
2. En $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$,
   (a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2\}$.
   (b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.
   (c) Hallar los polinomios constantes más cercanos a X y a X^2.

Ejercicio 9.

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\mathrm{Nu}(A)$ es ortogonal a $\mathrm{Im}(A)$.
2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana, es decir tal que $\overline{A^t} = A$. Probar que $\mathrm{Nu}(A)$ es ortogonal a $\mathrm{Im}(A)$.

Ejercicio 10. Encontrar una tercera columna para que la matriz $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sea ortogonal siendo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geométricamente.

Ejercicio 11. Encontrar una tercer fila para que la matriz $Q \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sea unitaria siendo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 12. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

$(*)$ **Ejercicio 13.** *La solución de longitud mínima de un sistema compatible*

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que el sistema $Ax = b$ es compatible.

1. Intuitivamente: hacer un dibujo en $\mathbb{R}^2$ representando $\mathrm{Nu}(A)$ como una recta y representar también el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. Determinar quién debe ser la solución de longitud mínima (cómo debe ser con respecto a la recta $\mathrm{Nu}(A)$).
2. Esta parte prueba que si existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \mathrm{Nu}(A)$, entonces $\overline{x}$ es la solución de longitud mínima, i.e. $\forall\ x$ solución, $x \neq \overline{x}$, se tiene $\|\overline{x}\| < \|x\|$:
   Usando que si $x \neq \overline{x}$, entonces existe $z \in \mathrm{Nu}(A)$ no nulo tal que $x = \overline{x} + z$ (justificar), calcular $\|x\|^2 = \langle \overline{x} + z, \overline{x} + z\rangle$ y concluir (recordar que $\overline{x} \perp \mathrm{Nu}(A)$).
   (Observar que esto implica en particular que si existe tal $\overline{x}$, entonces es único.)
3. Este parte prueba que siempre existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \mathrm{Nu}(A)$ (y que es única).
   (a) Justificar que sin perdida de generalidad se puede suponer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \leq n$ y $\mathrm{Rg}(A) = m$.
   (b) Probar que el sistema que resulta de $Ax = 0, x \perp \mathrm{Nu}(A)$ es cuadrado y tiene como única solución el 0
   (c) Concluir del item anterior que la matriz que describe el sistema $Ax = 0, x \perp \mathrm{Nu}(A)$ es inversible, y por lo tanto $\forall\ b \in \mathbb{R}^m$ el sistema $Ax = b, x \perp \mathrm{Nu}(A)$ tiene una única solución.
4. Encontrar la solución de longitud mínima del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$