

**MATEMATICA 2 (Complementos de Matemática 3)**  
**Verano 2009**

**Práctica 5 - Determinantes**

**Ejercicio 1.** Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 2.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$  con  $\det(A) = 8$ . Calcular  $\det(3A)$  y  $\det(-A)$ .

**Ejercicio 3.** Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x + 3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z + 3t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \operatorname{cos}^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \operatorname{cos}^2 b \\ \operatorname{sen}^2 c & 1 & \operatorname{cos}^2 c \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4.** Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 5.** Si  $A$  es una matriz invertible tal que tanto  $A$  como  $A^{-1}$  tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 ó  $-1$ ?

**Ejercicio 6.** Encontrar un ejemplo de  $4 \times 4$  en el que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$$

donde  $A, B, C, D$  son matrices de  $2 \times 2$ .

**Ejercicio 7.** Demostrar que las raíces de la ecuación  $\det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ b & \lambda - c \end{pmatrix} = 0$ , para  $a, b, c \in \mathbb{R}$  dados, y la variable  $\lambda$ , son reales.

**Ejercicio 8.**

1. Hallar  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonal con  $\det(A) = -1$ .
2. ¿Cuánto vale el determinante de una matriz ortogonal? ¿Y el de una matriz unitaria? ¿Cuál es su rango?

**Ejercicio 9.** Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 10.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Hallar todos los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para los que  $A$  es invertible y en esos casos hallar la inversa.

**Ejercicio 11.** Sea  $A \in K^{n \times n}$  una matriz triangular superior invertible. Mostrar, usando cofactores, que  $A^{-1}$  también es triangular superior.

**Ejercicio 12.** Resolver los siguientes sistemas lineales sobre  $\mathbb{R}$  empleando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 13.** Dadas las funciones reales  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  que satisfacen

$$\begin{cases} x_1(t) + t x_2(t) + t^2 x_3(t) = t^4 \\ t^2 x_1(t) + x_2(t) + t x_3(t) = t^3 \\ t x_1(t) + t^2 x_2(t) + x_3(t) = 0 \end{cases}$$

calcular  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t)$ .

**Ejercicio 14.**

1. Calcular el área del triángulo con vértices en el  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$  y  $(-1, 3)$ .
2. Calcular el volumen del paralelepípedo con 4 vértices en  $(0, 0, 0)$ ,  $(-1, 2, 2)$ ,  $(2, -1, 2)$  y  $(2, 2, -1)$ . ¿Cuáles son sus otros vértices?

Aplicaciones del determinante de Vandermonde

**Ejercicio 15.** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , todos distintos. Probar que las funciones  $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ . Deducir que  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  no tiene dimensión finita.

(Sugerencia: Derivar  $n - 1$  veces la función  $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$ .)

**Ejercicio 16.** Interpolación de polinomios:

Sean  $a_0, \dots, a_n \in K$  todos distintos y  $b_0, \dots, b_n \in K$  cualesquiera. Probar que existe un único polinomio  $P \in K[X]$  de grado menor o igual que  $n$  (o nulo) que satisface simultáneamente las condiciones

$$P(a_0) = b_0, P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n.$$