
MATEMÁTICA 2.

Segundo Cuatrimestre — 2010.

Práctica 2: Transformaciones lineales.

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

- a) $\text{tr} : M_n(k) \rightarrow k$.
- b) $L_A : B \in k^{n \times m} \mapsto AB \in k^{p \times m}$, para cada $A \in k^{p \times n}$.
- c) $\frac{d}{dx} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- d) $\text{ev}_a : p \in k[X] \mapsto p(a) \in k$, con $a \in k$.
- e) $t : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.
- f) $I : f \in C_{\mathbb{R}}([0, 1]) \mapsto \int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$.
- g) $L : C_{\mathbb{R}}([0, 1]) \rightarrow C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ con $Lf(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$.
- h) $f : p \in k[X] \mapsto p(X+1) - p(X) \in k[X]$.

Para cada una de ellas describa el núcleo y la imagen.

2. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Mostrar que f es inyectiva si y sólo si siempre que $v_1, \dots, v_n$ son vectores linealmente independientes, los vectores $f(v_1), \dots, f(v_n)$ también son linealmente independientes.

3. Sean $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ transformaciones lineales. Muestre que

- a) $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
- b) $\ker(f) = \ker(g \circ f)$ si $\text{im}(f) \cap \ker(g) = 0$.
- c) $\text{im}(g) \supset \text{im}(g \circ f)$.
- d) $\text{im}(g) = \text{im}(g \circ f)$ si $\text{im}(f) = V$.

Muestre, dando ejemplos, que en general no vale la igualdad ni en a) ni en c).

4. Si $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales, mostrar que

$$\dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)).$$

5. Si $f, g : V \rightarrow V$ son endomorfismos de V , entonces

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \text{im}(f).$$

6. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Probar que:

- a) Si $H \subset V$ es un subespacio, $\dim(f(H)) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker(f))$.
- b) Si $L \subset W$ es un subespacio, $\dim(f^{-1}(L)) = \dim(L \cap \text{im}(f)) + \dim(\ker(f))$.

7. Sean $f, g : V \rightarrow W$ transformaciones lineales.

- a) Mostrar que $\dim(\text{im}(f+g)) \leq \dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g))$.
- b) Mostrar que vale la igualdad si y sólo si $\text{im}(f) \cap \text{im}(g) = 0$ y $\ker(f) + \ker(g) = V$.

8. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V . Muestre que

- a) $\text{im}(f) \subset \ker(f)$ si y sólo si $f^2 = 0$.
- b) $\text{im}(f) = \ker(f)$ si y sólo si $f^2 = 0$ y $\dim(\text{im}(f)) = \dim(\ker(f))$.

9. Sean $f, g : V \rightarrow V$. Si $f \circ g = 0$, ¿es cierto que $g \circ f = 0$?

10. De ejemplos de pares de endomorfismos $f, g : V \rightarrow V$ de un espacio vectorial V tales que sea

- a) $fg = gf$;
b) $fg \neq gf$.
11. a) Sean $f, g : V \rightarrow W$ y $h : W \rightarrow V$ transformaciones lineales tales que $f \circ h = \text{id}_W$ y $h \circ g = \text{id}_V$. Entonces h es inversible y $h^{-1} = f = g$.
b) Si $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales inversibles, entonces $g \circ f$ también es inversible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
c) Sean $f, g : V \rightarrow V$ dos endomorfismos de V . Entonces f y g son inversibles sii $f \circ g$ y $g \circ f$ son inversibles.
d) Sean $f, g : V \rightarrow V$ dos endomorfismos de V . Si V tiene dimensión finita y $f \circ g = \text{id}_V$, entonces f y g son inversibles y $f^{-1} = g$.
De un ejemplo para mostrar que esta afirmación no es válida si eliminamos la hipótesis de que V tenga dimensión finita.
e) Sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Entonces f es inversible sii siempre que $v_1, \dots, v_n$ son n vectores linealmente independientes resulta que $f(v_1), \dots, f(v_n)$ también son linealmente independientes.
12. Sean V y W espacios vectoriales y sea $U \subset V$ un subespacio. Sea además $f : U \rightarrow W$ una transformación lineal. Mostrar que f puede extenderse a todo V de forma que la extensión sea lineal. Esto es, mostrar que existe una transformación lineal $\tilde{f} : V \rightarrow W$ tal que $\tilde{f}|_U = f$.