MATEMÁTICA 2
Segundo Cuatrimestre — 2010

Práctica 4: Determinantes

1. a) Sea $A = (a_{ij}) \in M_6(k)$. ¿Con qué signos aparecen los siguientes monomios en el desarrollo de $\det A$?
- i) $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$;
 - ii) $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$.
- b) Sea $A = (a_{ij}) \in M_4(k)$. Escribir todos los términos de $\det A$ que poseen el factor a_{23} y que tienen signo +.
- c) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de X^4 y X^5 en

$$\det \begin{pmatrix} 2X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

2. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

3. a) Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ una matriz triangular superior. Mostrar que $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

b) Calcular el determinante de $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. a) Sean $A \in k^{n \times n}$, $B \in k^{m \times m}$ y $C \in k^{n \times m}$, y sea $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ la matriz de bloques. Mostrar que $\det M = \det A \cdot \det B$.
- b) Sea $l \geq 1$, $n_1, \dots, n_l \geq 1$, y $A_i \in M_{n_i}(k)$ si $1 \leq i \leq l$. Mostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_l \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^l \det A_i.$$

5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}$$

6. a) Sean $v_1 = (a, b, c)$ y $v_2 = (d, e, f)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Probar que la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

- b) Con las mismas notaciones del ítem anterior, probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\varphi(x, y, z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $\langle v_1, v_2 \rangle$.

- c) Generalizar a $\mathbb{R}^n$.

7. Probar que el determinante de la matriz $A \in K^{n \times n}$ definida por

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es igual a $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$. La matriz A se llama la matriz *compañera del polinomio* P .

8. a) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$, y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\det A = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)$.

- b) Calcular

$$i) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix} \qquad ii) \det \begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix}$$

9. a) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ y sean $v_1, \dots, v_n$ los vectores de k^n dados por $v_i = (1, \alpha_i, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{n-1})$. Determinar cuando $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

- b) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

Sugerencia: Derivar $n - 1$ veces la función $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$.

10. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\operatorname{sen}(\theta) \\ -0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

11. Sea $A \in M_n(k)$.

a) Probar que son equivalentes:

i) $\operatorname{rg}(A) \geq s$

ii) A admite una submatriz de $s \times s$ con determinante no nulo.

b) Deducir que

$$\operatorname{rg}(A) = \max\{s \in \mathbb{N}_0 : A \text{ admite una submatriz de } s \times s \text{ con determinante no nulo.}\}$$

12. Sea $A \in M_n(k)$ inversible. Calcular $\det(\operatorname{adj} A)$.