
MATEMÁTICA 2

Segundo Cuatrimestre — 2010

Práctica 5: Autovalores y diagonalización

1. a) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado el caso en que los coeficientes están en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$	v) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix};$	viii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$	vi) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix};$	ix) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
iii) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix};$	vii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix};$	
iv) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix};$		

En todos los casos, $a \in \mathbb{K}$.

- b) Interprete cada una de las matrices del ítem anterior como la matriz de una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente) con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$, y encuentre, cuando es posible, una base $\mathcal{B}$ de manera tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es diagonal; en ese caso, encuentre la matriz de cambio de base $C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$.
2. a) Sean $A, D \in M_n(k)$ y $C \in GL_n(k)$ tales que $A = CDC^{-1}$. Mostrar que $A^k = CD^kC^{-1}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.
- b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. El objetivo de este ejercicio es encontrar una fórmula cerrada para la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ tal que $a_0 = a_1 = 1$ y, si $n \geq 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Considere el endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que, en la base canónica, está representado por la matriz

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que, para cada $n \geq 0$ es

$$f \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Encuentre ahora una base que diagonalice a f y use el ejercicio anterior y el hecho de que

$$f^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

para obtener una fórmula cerrada para a_n en esos casos.

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

5. Sea $D : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de D asociado al autovalor λ (observar que entonces D tiene infinitos autovalores).

6. Determinar qué matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in k$, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, son diagonalizables.

7. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f -invariantes.

b) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ :

$$[f_\theta]_E = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ -invariantes.

c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$ -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$[g_\theta]_E = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ -invariantes.

8. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $\chi_A = (t - \alpha)(t - z)(t - \bar{z})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sea $g_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la transformación lineal $g_A(x) = Ax^t$.

a) Probar que existe v_1 , autovector de g_A de autovalor α , con todas sus coordenadas reales.

b) Sea $w = v_2 + iv_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de g_A asociado al autovalor z . Probar que $\bar{w} = v_2 - iv_3$ es un autovector de g_A de autovalor $\bar{z}$.

c) Se considera $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f_A(x) = Ax^t$. Probar que $\langle v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio f_A -invariante de dimensión 2.

d) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que B es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $[f_A]_B$.

9. Sea $A \in M_n(k)$. Mostrar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.

10. Sea $f \in \text{End}(V)$ un proyector de un espacio vectorial de dimensión finita V tal que $\dim \text{im } f = s$. Determinar su polinomio característico, y mostrar que es diagonalizable.

- 11.** Un endomorfismo $f \in \text{End}(V)$ de rango 1 es diagonalizable sii $\ker f \cap \text{im } f = 0$.
- 12.** Sea $A \in M_n(k)$ diagonalizable y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de su polinomio característico contadas con multiplicidad. Mostrar que $\text{tr } A = \sum \lambda_i$ y que $\det A = \prod \lambda_i$.
- 13.** Sea V un k -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$, y $S \oplus T = V$. Si S y T son f -invariantes, probar que existe una base B de V y matrices $A_1 \in k^{s \times s}$ y $A_2 \in k^{t \times t}$ tales que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Probar que, en este caso, $\chi_f = \chi_{A_1} \chi_{A_2}$.

- 14.** Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = Ax^t$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$, f_A -invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.