
MATEMÁTICA 2

Segundo Cuatrimestre — 2010

Práctica 6: Forma normal de Jordan

1. Hallar la forma y una base de Jordan para la siguiente matriz en $\mathbb{C}^{9 \times 9}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in M_5(\mathbb{C})$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j; \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

3. Sea $A \in M_6(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente tal que $A^5 \neq 0$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5 .

4. a) Decidir si existe una matriz nilpotente $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ tal que:

$$\text{rg}(A) = 6 \quad \text{rg}(A^2) = 4 \quad \text{rg}(A^3) = 3 \quad \text{rg}(A^4) = 1 \quad \text{rg}(A^5) = 0$$

simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

- b) Decidir si existe una matriz nilpotente $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ que verifique:

$$\text{rg}(A) = 9 \quad \text{rg}(A^2) = 5 \quad \text{rg}(A^3) = 3 \quad \text{rg}(A^4) = 1 \quad \text{rg}(A^5) = 0$$

simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

5. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Sea $V \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $t : V \rightarrow V$ la transformación lineal definida por $t(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para t .

7. Sea $A \in M_{15}(\mathbb{C})$ una matrix con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_1 Id) = 13, \operatorname{rg}(A - \lambda_1 Id)^2 = 11, \operatorname{rg}(A - \lambda_1 Id)^3 = 10, \operatorname{rg}(A - \lambda_1 Id)^4 = 10,$$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_2 Id) = 13, \operatorname{rg}(A - \lambda_2 Id)^2 = 11, \operatorname{rg}(A - \lambda_2 Id)^3 = 10, \operatorname{rg}(A - \lambda_2 Id)^4 = 9,$$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda_3 Id) = 13, \operatorname{rg}(A - \lambda_3 Id)^2 = 12, \operatorname{rg}(A - \lambda_3 Id)^3 = 11.$$

Hallar su forma de Jordan.

8. Sea $A \in M_4(\mathbb{C})$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A -invariantes.

9. Sea $A \in M_5(\mathbb{C})$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar la forma y una base de Jordan para A .

b) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

10. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta$$

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Hallar una fórmula general para el término $a_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1, y(0) = 2$.