MATEMATICA 2 - Primer cuatrimestre de 2012

Práctica 1 - Espacios vectoriales

A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

Ejercicio 1. Dado un conjunto no vacío X, sea $K^X = \{f : X \to K \text{ tal que } f \text{ es una función}\}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$$
$$(k.f)(x) = k.f(x) \quad \forall\, x \in X$$

Probar que K^X, con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre K.

Ejercicio 2. Caracterizar geométricamente *todos* los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de V como K-espacio vectorial.

i) $S = \{a.i \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad V = \mathbb{C}, \quad K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$

ii) $S = \{f \in K[X] \mid f = 0 \text{ ó } \operatorname{gr}(f) \leq n\}$, $V = K[X]$

iii) $S = \{f \in K[X] \mid f = 0 \text{ ó } \operatorname{gr}(f) \geq n\}$, $V = K[X]$

iv) $S = \{M \in K^{n\times n} \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$, $V = K^{n\times n}$

v) $S = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$

vi) $S = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + af' + bf = 0\}$ (a y $b \in \mathbb{R}$ fijos), $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$

vii) $S = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0\ \forall\, r \geq k\}$, $V = K^\mathbb{N}$

Ejercicio 4. Sea $A \in K^{n\times m}$ y sea $S = \{x \in K^m \mid A.x = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A. Probar que S es un subespacio de K^m.

Ejercicio 5. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V.

i) Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V.

ii) Encontrar S y T subespacios de $V = \mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

iii) Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 6. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0, x - y = 0\}$

ii) $\{f \in \mathbb{R}_4[X] \mid f(1) = 0, f(0) = f(-1)\}$

iii) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A = -A^t\}$

iv) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f''' = 0\}$

Ejercicio 7. Sea $S = <(1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1)> \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

ii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

iii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 8. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

i) Sea V un K-espacio vectorial y sean v, $w \in V$, $k \in K$. Entonces $< v, w > = < v, w + kv >$.

ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^4$ tales que $< v_1, v_2, w > = < v_3, v_4, w >$. Entonces $< v_1, v_2 > = < v_3, v_4 >$.

iii) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3, w \in V$. Entonces:

$$< v_1, v_2, v_3, w > = < v_1, v_2, v_3 > \iff w \in < v_1, v_2, v_3 >$$

Ejercicio 9. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K.

i) $\{(1-i, i), (2, -1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$ para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\{(1-X)^3, (1-X)^2, 1-X, 1\}$ en $K[X]$

iii) $\{f, g, h\}$ en $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, siendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x \cos x$, $K = \mathbb{R}$

iv) $\{f, g, h\}$ en $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, siendo $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{-x}$, $K = \mathbb{R}$

Ejercicio 10. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes conjuntos es linealmente independiente.

i) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$

ii) $\{k.X^2 + X, X^2 - k, k^2.X\} \subset \mathbb{R}[X]$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Ejercicio 11. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales.

i) $\mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

ii) $\{A \in K^{n\times n} \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

iii) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] \mid f(2) = f'(2) = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

iv) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} \mid a_i = a_j \ \forall i, j\}$

Ejercicio 12.

i) Probar que el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, i, 0), (1, 1, i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

ii) Probar que el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

iii) Probar que $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

Ejercicio 13. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

i) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$

ii) $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X]$, $K = \mathbb{R}$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 14. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores.

i) $S = < (1, 1, 2), (2, 2, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) > \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$

ii) $S = < X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 > \subseteq \mathbb{R}[X]$, $K = \mathbb{R}$

iii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 15. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$< (-2,1,6),(3,0,-8) > = < (1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k) >$$

Ejercicio 16. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1,2,-1),(2,1,3),(1,3,-3)\}$

ii) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3,\ X+1,\ X^2+5,\ X^3+X^2\}$

iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa.

i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \mid 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z) \mid x + z = 0\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \mid 3x - 2y + z = 0,\ x - y = 0\}$ y $T = < (1,1,0),(5,7,3) >$

iii) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = 0\}$ y $T = < 1,\ X,\ X^2,\ X^3 + 2X^2 - X,\ X^5 >$

iv) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f'(0) = f''(0) = 0\}$

Ejercicio 18. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = < (1,k,2),(-1,2,k) >$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = < (0,1,1) >$.

Ejercicio 19. En cada uno de los siguientes casos probar que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.

i) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ es constante}\}$

ii) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$
(los elementos de S se llaman *funciones pares* y los de T, *funciones impares*)

iii) $V = K^{n\times n}$, $S = \{A \in K^{n\times n} \mid A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n\times n} \mid A = -A^t\}$
(los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*)

Ejercicio 20. Para cada S dado, hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.

i) $S = < (1,2,-1,3),\ (2,3,-2,1),\ (0,1,0,7) >$, $V = \mathbb{R}^4$

ii) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$

iii) $S = < 3, 1 + X^2 >$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

Ejercicio 21. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$

ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, $\dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

Ejercicio 22. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$).

i) Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus < v > = V$.

ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.

iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.