Práctica 1

1. **a)** Sea $z \in \mathbb{C}$, probar:

(i) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad , \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

(ii) $2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)| \leq |z|^2$

(iii) $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$

(iv) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, si $z \neq 0$

(v) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

b) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, probar que:

(i) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(ii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(iii) $|z_1||z_2| \geq \frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2)$

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $|z|.z = 1 + 2i$ **b)** $z.\overline{z} - 2|z| + 1 = 0$

c) $z^6 + 2 = 0$ **d)** $z^4 - 1 - i = 0$

3. Representar gráficamente los números: z , w , $z + w$, $z - w$, $\overline{z}$, $\overline{w}$, zw , para:

a) $z = 2i$, $w = \frac{3}{2} - i$ **b)** $z = (-\sqrt{3}, 1)$, $w = (\sqrt{3}, 0)$

4. **a)** Probar la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado :

$$az^2 + bz + c = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$

b) Resolver: $z^2 - (2i + 4)z + 10i - 5 = 0$

5. Dadas las rectas $z = a + b.t$, $z = c + d.t$, dar condiciones sobre $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ para que:

a) coincidan **b)** sean paralelas

6. Representar gráficamente la curva dada por la ecuación $|z - 1| + |z + 1| = 3$. Pensada como curva en $\mathbb{R}^2$, ¿cuál es su ecuación cartesiana?

7. a) Dadas las funciones

$t(z) = z + c$, $c \in \mathbb{C}$ fijo (traslación)

$h(z) = a(z - z_0) + z_0$, con $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ (homotecia de centro z_0 y razón a)

$i(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$ (inversión)

describirlas geométricamente. ¿Cuál es la imagen, por cada una de ellas, de una circunferencia y de una recta?

b) Probar que $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$ (homografía) se escribe como composición de funciones del tipo de las dadas en **a)**. Deducir cuál es la imagen por f de una circunferencia o de una recta.

8. Dada la homografía $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, determinar en qué se transforma la región definida por las dos condiciones $\mathrm{Re}(z) > 0$, $|z| < 1$.

9. Describir geométricamente la región determinada por cada una de las siguientes condiciones. Decidir si son abiertas o cerradas y si son o no conexas.

a) $|\mathrm{Re}(z)| < 2$ **b)** $|z - 4| > 3$ **c)** $|z - 1 + 3i| \leq 1$

d) $|\mathrm{Im}(z)| > 1$ **e)** $\mathrm{Re}(z) > 0$ **f)** $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$

g) $-\pi \leq \arg(z) < \pi$, $|z| > 2$ **h)** $1 < |z - 2i| \leq 2$ **i)** $\mathrm{Im}(z^2) > 0$

j) $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}$ **k)** $\mathrm{Im}(z) < 1$ ó $z = 2i$

10. a) Para cada uno de los siguientes puntos de $\mathbb{C}$, dar el correspondiente en la esfera de Riemann: 0 , $1 + i$, $3 + 2i$.

b) Probar que z , w corresponden a puntos antípodas en la esfera de Riemann si y sólo si $z\overline{w} = -1$.