

Práctica 2

1. a) Sea $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$, probar que

$$z_n \rightarrow z \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \text{ e } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$$

b) Probar que la sucesión $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ es de Cauchy si y sólo si lo son las sucesiones reales $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \geq 1}$ e $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \geq 1}$.

Deducir que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo.

2. Probar

a) $z_n \rightarrow z, w_n \rightarrow w \Rightarrow z_n \pm w_n \rightarrow z \pm w \text{ y } z_n w_n \rightarrow zw.$

b) $z_n \rightarrow z, w_n \rightarrow w, w \neq 0 \Rightarrow \frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{z}{w}.$

c) $z_n \rightarrow z \Rightarrow |z_n| \rightarrow |z|.$ ¿Bajo qué condiciones vale la recíproca?

3. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) $n i^n$	b) $n \left(\frac{1+i}{2} \right)^n$	c) $\left(\frac{(-1)^n + i}{2} \right)^n$
d) $\cos(n\pi) + i \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$	e) $(1+2i)^{-n}$	f) z^{-n}
g) $\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$	h) $-1 + \frac{(-1)^n i}{n}$	i) $\frac{n+1}{n} + i \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$
j) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$	k) $\left(\frac{1+i}{2} \right)^n$	

4. Sea $(z_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos. Probar

a) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge (absolutamente) si y sólo si las series $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ convergen (absolutamente).

b) si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

5. a) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n$? Demostrarlo.

b) Idem para $|\alpha| > 1$. ¿Qué se puede decir en el caso $|\alpha| = 1$?

c) Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

■ converge si $|z| < 1$

■ diverge si $|z| > 1$.

Hallar su suma para $|z| < 1$.

6. Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas cuyo término general es:

a) $\frac{2i}{3^n}$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$

c) $\frac{n+1}{2n+1}$

d) $\frac{2^n}{5^n - n}$

e) $\frac{1}{n!}$

f) $\frac{n}{n^n}$

g) $\frac{n}{n^2 - n}$

h) $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

i) $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

j) $(-1)^n \frac{\log n}{n}$

k) $\frac{1}{n+5}$

l) $\frac{2^n}{n^n}$

m) i^n

n) $\frac{i^n}{n}$

o) $\frac{e^{in}}{n^2}$

7. Probar

a) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \alpha$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow a} \overline{f(z)} = \overline{\alpha}$

b) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \alpha$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(\alpha)$ y $\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(\alpha)$

8. Calcular

a) $\lim_{z \rightarrow -i} z \cdot \bar{z}$

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z}$

c) $\lim_{z \rightarrow i} f(z)$ para $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & , z \neq i \\ 3 + 2i & , z = i \end{cases}$

9. Sea $\varphi : \mathbb{C}_{\neq 0} \rightarrow (-\pi, \pi]$ definida por : $\varphi(z)$ es el único número de $(-\pi, \pi]$ tal que $z = |z| e^{i\varphi(z)}$. ¿Es continua en todo su dominio? ¿Dónde lo es?

NOTA: dado $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, al número $\varphi(z)$ se lo llama **argumento principal de z** y se lo nota : $\varphi(z) = \text{Arg}(z)$.

10. Encontrar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones

a) $f(z) = \log|z| + i\text{Arg}(z)$ **b)** $f(z) = \frac{z}{z^4 + 1}$

11. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden definir en $z = 0$ de modo tal que resulten continuas en $\mathbb{C}$?

a) $\frac{\text{Re}(z)}{|z|^2}$ **b)** $\frac{\text{Re}(z)}{|z|}$
c) $\frac{(\text{Re}(z))^2}{|z|}$ **d)** $\frac{\text{Re}(z^2)}{|z|^2}$