

Práctica 4

1. Criterio de Weierstrass

Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente en X .

2. Sean $(A_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones de números complejos tales que $(A_n \cdot v_n)_{n \geq 1}$ converge. Probar que si una de las series:

$$A_0 v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1}) v_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n (v_n - v_{n+1})$$

converge, también lo hace la otra.

3. Criterio de Dedekind

Sean $(a_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ sucesiones de números complejos tales que:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene las sumas parciales acotadas
- $\sum_{n=1}^{\infty} v_n - v_{n+1}$ es absolutamente convergente
- $v_n \rightarrow 0$

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ es convergente.

4. Criterio de Dirichlet

Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0 y existe $M > 0$ tal que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

5. a) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ para $|z| < 1$.

b) Sea $z = re^{i\theta}$ con $0 < r < 1$. Usar a) para verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

6. Producto de Cauchy

Dadas las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, se llama **producto de Cauchy** de ambas a la serie de término general $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Probar que si ambas series convergen, siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, y al menos una de ellas lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge a AB .

7. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+(1+i)^n}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$	e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$	f) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$
g) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \quad (a \in \mathbb{C})$	h) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C})$	i) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$
j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)} \dagger$	k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$	l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$
m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$	n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$	o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$

8. a) Determinar el conjunto de valores z para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$ converge y hallar su suma.

b) Idem para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$.

9. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de las series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+ z }$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+ z }$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+ z }$	e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$	f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi inz}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$

[†] Sobre el borde estudiar únicamente para $z = 1, i, -i$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n$$

10. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ tiene un valor finito en todos los puntos interiores y sobre su círculo de convergencia, pero que esto no es verdadero para la serie de las derivadas.

11. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ con radio de convergencia $R > 0$, probar que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

12. **Serie binomial:** $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$

Probar que esta serie converge absolutamente cuando $|z| < 1$ y diverge cuando $|z| > 1$.

13. **Exponencial:** $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

a) Probar que es entera y calcular su derivada.

b) Probar que $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$.

c) Calcular: $|e^z|$, $\arg e^z$, $\operatorname{Re}(e^z)$, $\operatorname{Im}(e^z)$, $\overline{e^z}$

d) Probar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y calcular $1/e^z$.

e) Analizar la existencia de $\lim_{|z| \rightarrow \infty} e^z$.

f) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.

g) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = \pm 1$.

h) Mostrar que $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

14. **Funciones trigonométricas**

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

a) Probar que $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{cos} z$ son enteras y calcular sus derivadas.

b) Probar que

$$\text{(i) } \operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(ii) \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$(iii) \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$$

$$(iv) e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

$$(v) \begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \\ \operatorname{sen}(z+w) &= \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z \end{aligned}$$

c) Verificar que ambas tienen período 2π .

d) Probar

$$(i) |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2(\operatorname{Re} z) + \operatorname{sh}^2(\operatorname{Im} z)$$

$$(ii) |\cos z|^2 = \cos^2(\operatorname{Re} z) + \operatorname{sh}^2(\operatorname{Im} z)$$

e) (i) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z = 0$.

(ii) Idem para $\cos z$.

f) Caracterizar los conjuntos $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{sen} z = 8\}$ y $\{z \in \mathbb{C} / \cos z = i\}$.

15. Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

a) Verificar

$$(i) \operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sh} z \quad , \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z$$

$$(ii) \operatorname{sh}(iz) = i \operatorname{sen} z \quad , \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$$

$$(iii) \operatorname{sh}|\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z) \quad , \quad \operatorname{sh}|\operatorname{Im} z| \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z)$$

Deducir que $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ no son acotadas en \mathbb{C} .

$$(iv) \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\operatorname{Re} z) \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sh}(\operatorname{Im} z) \cos(\operatorname{Re} z)$$

b) Estudiar la periodicidad de $\operatorname{sh} z$ y $\operatorname{ch} z$.

c) Hallar los ceros de ambas funciones.

d) Hallar el desarrollo en serie de potencias de ambas funciones.

16. Logaritmo

- a) Dado $w \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = w$.
- b) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ continuas y tales que
- $$e^{f(z)} = z \quad \text{y} \quad e^{g(z)} = z$$
- para todo $z \in A$. Probar que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ para todo $z \in A$.
- c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$
- (i) Probar que A es abierto y conexo y que para cada $z \in A$ existe un único $\theta_z \in (-\pi, \pi)$ tal que $z = |z|e^{i\theta_z}$.
 - (ii) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \ln|z| + i\theta_z$. Probar que es una rama del logaritmo.
 - (iii) Ver que f es holomorfa en A y hallar f' .
 - (iv) ¿Siguen siendo válidos estos resultados si se reemplaza el conjunto A por $B = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0}/r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ donde $0 < \theta_0 \leq 2\pi$?
 - (v) Escribir todas las ramas del logaritmo en función de la dada en (ii).
- d) Sean φ, ψ dos ramas del logaritmo, ¿es cierto que $\varphi(e^z) = \psi(e^z) = z$ para todo z ? Estudiar si se conservan o no para los números complejos las demás propiedades del logaritmo real.
- e) Calcular: $\ln i$, $\ln 1$, $\ln(1+i)$, $e^{\ln i}$.

17. Sea $\varphi(z)$ el único número del intervalo $[-\pi, \pi)$ tal que: $z = |z|e^{i\varphi(z)}$. Definimos las funciones:

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi(z)}{2}} \quad \text{y} \quad g(z) = \sqrt{|z|}e^{i(\frac{\varphi(z)}{2} + \pi)}$$

- a) Probar que $f(z)^2 = g(z)^2 = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- b) ¿Son continuas en \mathbb{C} ?
- c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que f y g son continuas en A .
- d) Si se reemplaza el intervalo $[-\pi, \pi)$ por $[0, 2\pi)$, ¿quién debería ser A ?
- e) ¿Dónde son holomorfas f y g ?
- f) Mostrar que $\operatorname{Re}(f) \geq 0$.

18. Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, G abierto conexo, una rama del logaritmo. Definimos la función $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) = e^{bf(z)}$, $b \in \mathbb{C}$ fijo.

- a) Probar que si $b \in \mathbb{Z} : g(z) = z^b$.
- b) Si G es un abierto conexo donde está definida una rama del logaritmo y $b \in \mathbb{C}$, definimos : $z^b = e^{b \ln z}$. Probar que esta función es holomorfa en G .
- c) Calcular i^i considerando la rama principal del logaritmo. Hallar los demás valores considerando las restantes ramas. Idem para : $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π .
- d) Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y sean $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ ramas de z^a y z^b , respectivamente. ¿Es cierto que
- $f \cdot g$ es una rama de z^{a+b} ?
 - f/g es una rama de z^{a-b} ?
 - si $f(G), g(G) \subset G$, $f \circ g$ y $g \circ f$ son ramas de z^{ab} ?

19. Describir los siguientes conjuntos

- a) $\{z \in \mathbb{C}/e^z = i\}$ b) $\{z \in \mathbb{C}/e^z = -i\}$ c) $\{z \in \mathbb{C}/e^z \in \mathbb{R}\}$
d) $\{z \in \mathbb{C}/\cos z = 1\}$ e) $\{z \in \mathbb{C}/\cos z = \cos z_0\}$

20. Hallar la determinación principal de $\ln(1+z)$.

21. Sea f la rama principal de $\ln(1+z)$ y $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

- a) Calcular el radio de convergencia.
b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$ para z dentro del círculo de convergencia de g .
c) Deducir que $f(z) = g(z)$ para $|z| < 1$.

22. Sea $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$.

- a) Probar que es holomorfa en $|z| < 1$.
b) Calcular su derivada.
c) Calcular la derivada de $(1+z)^{-\alpha} \cdot f(z)$.
d) Probar que $f(z) = (1+z)^\alpha$ en $|z| < 1$.
¿Hace falta alguna aclaración?