Práctica 5

1. Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ definida sobre $A \subset \mathbb{R}$, en lo siguientes casos.

a) $f_n(x) = x^n$ $\qquad A = (-1, 1]$

b) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ $\qquad A = \mathbb{R}$

c) $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$ $\qquad A = [0, 1]$

d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}$ $\qquad A = \mathbb{R}$

e) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ $\qquad A = (1, +\infty)$

2. Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en A , para:

a) $f_n(x) = x^n$ $\qquad A = (0, \frac{1}{2}]$

b) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n^2+3}\operatorname{sen}(2nx - n\pi)$ $\qquad A = \mathbb{R}$

c) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ $\qquad A = [2, 5]$

3. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ en $\mathbb{R}$ $\qquad$ **b)** $\operatorname{sen}(\frac{x}{n})$ en $\mathbb{R}$ $\qquad$ **c)** z^n en $|z| < 1$

d) $\dfrac{n}{n+1}z$ en $\mathbb{C}$ $\qquad$ **e)** $\dfrac{1}{nz}$ en $\mathbb{C}_{\neq 0}$ $\qquad$ **f)** nz^2 en $\mathbb{C}$

4. Mostrar que $\dfrac{1}{1+nx}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0, 1)$. Probar que esta sucesión converge uniformemente sobre todo intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$.

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua. Se define

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im}(f)(x)dx$$

Probar

a) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

b) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

6. Calcular

a) $\int_0^{\pi/4} e^{it}dt$ **b)** $\int_0^{\infty} e^{-zt}dt$ $(\mathrm{Re}(z) > 0)$ **c)** $\int_1^2 \log(it)dt$

7. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, se llama **primitiva** de f a cualquier función $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

a) Probar que si F y G son primitivas de f, entonces $F - G$ es constante.

b) **Teorema Fundamental del Cálculo**

Toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ tiene una primitiva y si F es cualquier primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

8. a) Sean γ, σ las poligonales de vértices: $\{1, i\}$ y $\{1, 1+i, i\}$. Hallar una parametrización de γ y de σ y calcular $\int_\gamma f$ y $\int_\sigma f$, donde $f(z) = |z|^2$.

b) Deducir que en el plano complejo deja de ser cierto que toda función continua tiene primitiva.

9. Calcular: $\int_\gamma 3z dz$ y $\int_\gamma 3|z| dz$, para

a) γ : segmento que une -1 con 1

b) γ : $|z| = 1$ de -1 a 1

c) γ : poligonal de vértices -1 , i , 1

10. Calcular $\int_c z^2 dz$ cuando c es:

a) la porción de parábola $x = y^2$ comprendida entre (0,0) y (1,1)

b) el arco de circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ que une los puntos (0,0) y (1,1)

c) la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

d) el triángulo de vértices (0,0) , (1,1) y $(-1,1)$

11. Calcular

a) $\displaystyle\int_C e^z dz$ si $C : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ recorrida una vez en sentido positivo.

b) $\displaystyle\int_0^1 x dz$ uniendo ambos puntos con un segmento y luego con la poligonal de vértices: 0 , i , 1.

c) $\displaystyle\int_{|z-a|=r} (z-a)^m dz$ para cada $m \in \mathbb{Z}$, recorriendo la curva una vez en sentido positivo.

12. Sea γ el polígono cerrado de vértices: $1-i$, $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Hallar $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

13. Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma : [a,b] \to D$ diferenciable a trozos y $f : D \to \mathbb{C}$ continua. Se define:

$$\int_\gamma f|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

a) ¿Qué se obtiene cuando $f \equiv 1$?

b) Calcular $\displaystyle\int_\gamma |dz|$ para $\gamma : |z-a| = r$.

c) Probar

(i) $\displaystyle\int_{\gamma\circ\sigma} f|dz| = \int_\gamma f|dz|$ si $\sigma : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ es diferenciable.

(ii) $\displaystyle\int_{-\gamma} f|dz| = \int_\gamma f|dz|$

(iii) $\displaystyle\left|\int_\gamma f dz\right| \leq \int_\gamma |f||dz|$

(iv) Deducir que si $|f(z)| \leq M$ y $\ell = \text{long}(\gamma)$, entonces $\displaystyle\left|\int_\gamma f dz\right| \leq M\ell$.

14. Calcular

a) $\displaystyle\int_\gamma x dx$, γ : segmento de 0 a $1+i$

b) $\displaystyle\int_{|z|=r} x dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} |z-1||dz|$

d) $\displaystyle\int_C \mathrm{sen} z dz$, C : $z(t) = it$, $0 \leq t \leq \pi$

e) $\displaystyle\int_C z^n dz$, C : $z(t) = ae^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}$

f) $\displaystyle\int_C z^n dz$, C : $z(t) = ae^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}$

g) $\displaystyle\int_\gamma f(x)dx + g(y)dy$, γ : curva simple cerrada, f, g continuas.

h) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-2}$, C : $|z-2| = 4$

i) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-2}$, C : $|z-1| = 5$

j) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 + iy^2)|dz|$, γ : $|z| = 2$

k) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \overline{z}^2 dz$

15. Hallar $\displaystyle\int_\gamma z^{-\frac{1}{2}} dz$, donde:

a) $\gamma : |z| = 1$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, de 1 a -1.

b) $\gamma : |z| = 1$, $\mathrm{Im}(z) \leq 0$, de 1 a -1.

16. a) Sea $\gamma(t) = 1 + e^{it}$para $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar $\displaystyle\int_\gamma (z^2-1)^{-1} dz$.

b) Idem para $\gamma(t) = 2e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

17. Sean γ una curva simple y cerrada en un abierto G y $a \notin G$. Mostrar que para $n \geq 2$ es $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} dz = 0$.

18. Sea $F : G \to \mathbb{C}$ holomorfa, $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $\gamma : [a,b] \to G$ una curva diferenciable que une los puntos $z_1 = \gamma(a)$ y $z_2 = \gamma(b)$.

a) Probar que $\displaystyle\int_\gamma F'(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.

b) Deducir que $\displaystyle\int_\gamma F'(z)dz$ no depende de γ.

NOTA: usar sin demostrar que F' es continua.

19. Integración por partes
Sea G un abierto de $\mathbb{C}$, f , g holomorfas en G y γ una curva diferenciable con extremos a y b contenida en G. Probar que:

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_\gamma f'(z)g(z)dz$$

20. Sea f holomorfa en un abierto conexo Ω tal que $|f(z) - 1| < 1$ en Ω. Mostrar que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ para cualquier curva cerrada γ contenida en Ω.

NOTA: f' es continua.

21. Sean $f : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ la rama principal del logaritmo y $g : \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \to \mathbb{C}$ la rama del logaritmo que verifica $g(1) = 2\pi i$.

a) Escribir, si es posible, g en términos de f indicando dónde vale esa relación.

b) Calcular $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ siendo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ una curva que une 1 con i.

22. Sean $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$, $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_n(t) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) re^{it}$, donde $r > 0$. Probar que si f es continua en $|z| \leq r$, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n \to \infty} \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

23. Sean γ una curva diferenciable a trozos, $(f_n)_{n \geq 1}$, f funciones continuas en $\mathrm{Im}(\gamma)$ y tales que $f_n \to f$ uniformemente en $\mathrm{Im}(\gamma)$. Probar que

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

24. Sea $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ de clase C^1.

a) Para cada $s \in [a,b]$ fijo, sea $f_s : [c,d] \to \mathbb{C}$ dada por $f_s(t) = \varphi(s,t)$. Probar que

$$f_s'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)$$

para todo $t \in [c,d]$.

b) Probar que dado $s \in [a,b]$ fijo, resulta

$$\varphi(s,t_2) - \varphi(s,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,u)du$$

25. Regla de Leibniz

Sea $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ continua y $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ dada por $g(t) = \displaystyle\int_a^b \varphi(s,t)ds$. Entonces:

a) g es continua.

b) Si $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ es continua en $[a,b] \times [c,d]$ entonces g es C^1 y $g'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)ds$

26. Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y F , G primitivas de $f : D \to \mathbb{C}$ continua. Probar que $F - G$ es constante.

27. Teorema del Valor Medio

Sea f holomorfa en $|z-a| \leq r$, $r > 0$. Probar que:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$$

28. Determinar el dominio de holomorfía de la función f y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para demostrar que $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ cuando $C : |z| = 1$, siendo:

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$ **b)** $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$ **c)** $f(z) = ze^{-z}$

29. Calcular

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\text{sen}z}{z^3}dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log z}{z^n}dz$, $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $n \geq 0$.

e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$, $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

30. **Desigualdades de Cauchy**
Sea f holomorfa en $B(a, R)$ y tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in B(a, R)$. Probar que en tal caso:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

31. Mostrar que las derivadas sucesivas de una función holomorfa en un punto z no pueden satisfacer:

$$|f^{(n)}(z)| > n!.n^n$$

32. Calcular:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z - \frac{1}{2})^n}$, $\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$, $\gamma(t) = 2\pi e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\text{sen}z}{z}dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}dz$, $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r \in \mathbb{R}_{>0} - \{2\}$

33. Hallar todas las f holomorfas en $|z| \leq 1$ tales que $|f(z)| \leq \sqrt{5}$ cuando $|z| = 1$ y $f(\frac{1}{3}) = 2 + i$.

34. Encontrar los desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto a , para:

a) $\displaystyle\frac{e^z - 1}{z}$, $a = 0$

b) ze^z , $a = -1$

c) $(z+1)^{-1}$, $a = 1$

d) $\displaystyle\frac{1-z}{(z+1)^3}$, $a = 0$

35. Desarrollar la función $f(z) = z^{-1}$ en serie de potencias de $z + 1 - i$.

36. **a)** ¿Existe f holomorfa en $|z| < 1$ tal que $f(\frac{1}{2n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

b) ¿Existe f holomorfa en un entorno de cero tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

c) ¿Existe f holomorfa en un entorno de cero tal que $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

37. Sea $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfa, G abierto conexo, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in G$ tal que $f(a) = 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : G \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$, de modo que $f(z) = (z-a)^n g(z)$ para todo $z \in G$.

38. **a)** Sea f entera y tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que f es un polinomio.

b) Sea f entera tal que para algún $k \geq 0$ tal que $\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{f(z)}{z^k}\right| = 0$. Probar que f es un polinomio de grado menor que k (si $k > 0$) o $f \equiv 0$ (si $k = 0$).
Deducir que si f es entera y acotada entonces f es constante.

39. Sean f, g enteras tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué conclusión se puede deducir?

40. Probar que si la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es convergente en $|z - z_0| < r$, entonces la serie $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ es convergente en este disco y su suma es una primitiva de f.
¿Prueba esto que toda función holomorfa en un abierto D admite primitiva en todo D?

41. Probar

a) Si una función f es analítica en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ entonces para todo $a \in D$ la serie de Taylor de f en a converge y tiene por suma $f(z)$ en todo disco abierto $|z - a| < r$, donde $r = d(a, \mathbb{C} - D)$.

b) Si f es entera coincide con su serie de Taylor en cualquier punto a, en todo $\mathbb{C}$.

c) Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa. ¿Se puede encontrar siempre una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z_0 \in D$, tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ en D.

42. **a)** Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que restringida a $\mathbb{R}$ tiene radio de convergencia ∞. Probar que f es entera.

b) Dar una interpretación del hecho que la función real $\dfrac{1}{1+x^2}$ es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$ pero no es desarrollable en serie de potencias de radio ∞.