Práctica 6

1. **a)** Sea f entera y tal que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Probar que $f \equiv 0$.

b) Hallar todas las f enteras tales que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 5$.

2. Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$; hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

a) $0 < |z| < 1$

b) $1 < |z| < 2$

c) $|z| > 2$

d) $1 < |z-2| < 2$

e) $0 < |z-2| < 1$

f) $0 < |z-1| < 1$

3. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ multiplicando los desarrollos de $\dfrac{1}{z-1}$ y de $\dfrac{1}{z-2}$.

4. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones en las regiones indicadas

a) $\dfrac{2}{z^3 - 3z^2 + 2z}$ en $1 < |z| < 2$

b) $\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ en $0 < |z-1| < 1$ y en $|z-1| > 1$

c) $\dfrac{z}{(z-1)^3}$ en $\mathbb{C} - \{1\}$, en $|z| < 1$ y en $|z| > 1$

d) $\dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)^2}$ en:

(1) $|z| < 2$ (2) $0 < |z+3| < 1$ (3) $|z| > 3$ (4) $0 < |z+2| < 1$ (5) $2 < |z| < 3$

5. Si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, probar que el desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $1 < |z| < 2$ tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos no nulos.

6. Probar que todo disco perforado $0 < |z| < \varepsilon$ la función $e^{\frac{1}{z}}$ toma todos los valores complejos salvo el cero.

7. Sea $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, $z \neq 0$. Mostrar que f tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y explicar por qué este hecho muestra que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(0) = 0$ y $F(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, si bien es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$, no coincide con su serie de Taylor en ningún entorno de cero.

8. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Determinar su naturaleza. Si es evitable, definir $f(0)$ de modo que resulte holomorfa en $z = 0$. Si es un polo, hallar la parte singular

a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ **b)** $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ **c)** $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$

d) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ **e)** $f(z) = \dfrac{\log(z+1)}{z}$ **f)** $f(z) = \dfrac{1}{z}\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$

g) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-1)}$ **h)** $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$ **i)** $f(z) = z\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

9. Determinar la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{z^2+1}{(z^2+z+1)(z-1)^2}$.

10. Hallar y clasificar las singularidades de

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(2z)}{(z+1)^3}$ **b)** $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}(\frac{1}{z})$ **c)** $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$

d) $\dfrac{1-\cos z}{z^n} - \dfrac{1}{z}$ **e)** $-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(z^2+1)^{-1}}$ **f)** $\dfrac{\cos z}{e^{\frac{1}{z-1}}}$

g) $\dfrac{1}{\cos(z+1)}$

11. Probar que un punto singular aislado a de f es un polo si y sólo si $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = \infty$.

12. **a)** Mostrar que $f(z) = \operatorname{tg} z$ es meromorfa en $\mathbb{C}$.

b) Hallar sus polos y el orden de los mismos.

c) Determinar la parte singular de f en cada polo.

13. Sea $f(z) = \dfrac{a_m z^m + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0}$. Probar

a) ∞ es a lo sumo una singularidad aislada.

b) si $m < n$, ∞ es una singularidad evitable.

c) si $m = n$, f es holomorfa en ∞.

d) si $m > n$, ∞ es un polo. Hallar su orden.

14. a) Probar que una función entera tiene una singularidad evitable en ∞ si y sólo si es constante.

b) Probar que una función entera tiene un polo de orden m en ∞ si y sólo si es un polinomio de grado m.

c) Caracterizar a las funciones racionales que tienen una singularidad evitable en ∞.

d) Caracterizar a las funciones racionales que tienen un polo de orden m en ∞.

15. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\mathbb{C}_\infty$

a) $\dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$ **b)** $\cos z \, . \, e^{-\frac{1}{z^2}}$

c) $\dfrac{1}{z^3 - 7z^2 + z + 5} + z e^{\frac{1}{z}}$ **d)** $\dfrac{z^5}{1 + z^4}$

e) $\left(\operatorname{sen}(\frac{1}{z^2})\right)^{-1}$ **f)** $e^{\frac{z}{1-z}}$

g) $\dfrac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1}$ **h)** $\operatorname{sen}(\frac{1}{z}) + \dfrac{1}{z^2}$

i) $\dfrac{1}{\cos z - 1}$ **j)** $\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{z}{z+3})}{(z + 2 - \frac{i}{4\pi})(1 - e^{1/(z+2)})}$

16. a) Hallar una función f tal que $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$ y f no holomorfa en 0.

b) Mostrar que una función puede ser holomorfa en ∞ y tener residuo no nulo allí .

c) Probar que si f tiene una singularidad esencial en $z = a$, $\dfrac{1}{f}$ tiene una singularidad esencial, o no aislada, en $z = a$.

d) Mostrar que si ∞ es un cero de f de orden mayor que 1, entonces $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$.

e) Mostrar que si ∞ es un cero simple de f , entonces : $\operatorname{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \to \infty} z f(z)$.

17. Probar:

a) Sea a un polo de orden m de f y sea $g(z) = (z-a)^m f(z)$, entonces: $\text{Res}(f,a) = \dfrac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a)$

b) Si a es un polo simple de f, entonces: $\text{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

18. Sea f una función meromorfa en un abierto conexo G. Probar:

a) Si f tiene un polo de orden m en $a \in G$, su derivada logar´ i tmica tiene en él un polo simple, siendo $\text{Res}(f'/f, a) = -m$.

b) Si f tiene un cero de orden m en $b \in G$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\text{Res}(f'/f, b) = m$.

c) Si f tiene un polo simple en a y g es holomorfa en a entonces $\text{Res}(fg, a) = \text{Res}(f,a).g(a)$.

19. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$ **b)** $f(z) = \dfrac{1}{z^3}\text{sen}z$

c) $f(z) = z^5\cos z$ **d)** $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$

e) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ **f)** $f(z) = \dfrac{\cos z}{\text{sen}z}$

g) $f(z) = e^{2z}(z-1)^2$ **h)** $f(z) = \dfrac{\cos z}{z+1}$

i) $f(z) = \dfrac{\text{sen}z}{z}$ **j)** $f(z) = \dfrac{1+z^2}{z(z-1)^2}$

k) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ **l)** $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^7(z^2+2)(z-1)}$

m) $f(z) = \cos\left(\frac{\pi}{z-\pi}\right)$ **n)** $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$

20. Calcular los siguientes residuos

a) $z^2(z-1)^{-1}$ en $z=0$

b) $ze^z(z^2-1)^{-1}$ en $z=1$

c) $e^z(z-1)^{-2}z^{-1}$ en $z=0,1$

d) $\dfrac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ en $z=\infty$

e) $e^{az}(1+e^z)^{-1}$ en $z=\pi i$

f) $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)z}$ en $z=0,-1,\infty$

21. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia $|z|=2$, recorrida una vez en sentido positivo. Calcular:

a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^4+1}dz$

b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1+\mathrm{sen}z}{\mathrm{sen}z}dz$

c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$

22. Sea $G=\mathbb{C}-[-1,1]$. Se define en G la función $f(z)=z^2\log\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

a) Calcular $\mathrm{Res}(f,\infty)$.

b) Utilizando el método de los residuos, calcular:

$$\int_C f(z)dz \qquad \text{y} \qquad \int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz$$

siendo $C:|z|=2$

23. Clasificar las singularidades y hallar todos los residuos en $\mathbb{C}_\infty$ de:

a) $\dfrac{e^{z^2+\frac{1}{z^2}}-1}{z^2-1}$

b) $\dfrac{\cos z-1}{z^6+z^4}$

c) $\dfrac{\cos z-1}{(z-2\pi)^2}+\dfrac{z-3}{(z+1)^2(z-2)}$

24. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}_\infty-\{-1,2\}$ tal que -1 es un polo simple y 2 un polo doble. Se sabe además que:

- $\mathrm{Res}(f,-1)=1$ y $\mathrm{Res}(f,2)=2$
- $f(0)=\dfrac{7}{4}$ y $f(1)=\dfrac{5}{2}$

Determinar f y calcular su desarrollo en serie de Laurent en potencias de z en la corona $1<|z|<2$ y el residuo de f en ∞.

25. Calcular:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3+2z^2+z+1}{3z^5-2z^4+5}dz$ $\qquad \gamma : |z| = 3$ en sentido positivo

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\mathrm{sen} z^2}$ $\qquad \gamma : |z| = \frac{\pi}{2}$ en sentido negativo

26. Sea a una singularidad aislada de f y $\gamma(t) = a + re^{it}$,, $0 \leq t \leq 2\pi$. Probar que $\displaystyle\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz.$

27. Calcular, sin efectuar el desarrollo, el radio de convergencia de las series de Taylor de las siguientes funciones

a) $\displaystyle\frac{1}{\mathrm{sen}(1+iz)}$ en $z = 0$ $\qquad$ **b)** $\displaystyle\frac{1}{\mathrm{sen} z}$ en $z = \frac{3}{2} - i$