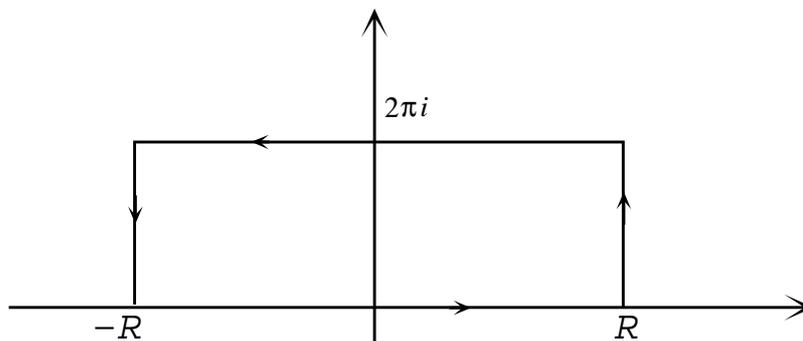


Práctica 7

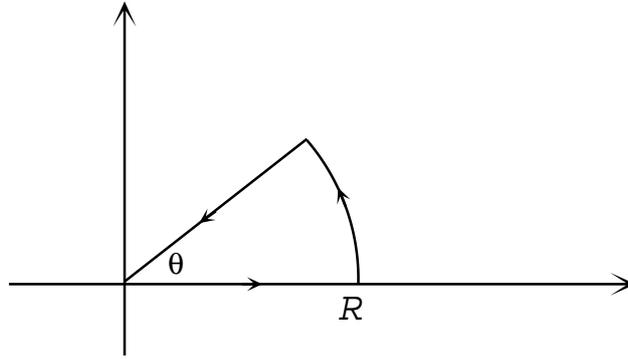
1. a) Verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\text{sen}(a\pi)}$, $0 < a < 1$, integrando la función $\frac{e^{az}}{1+e^z}$ en:



- b) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} dx$ considerando la función $\frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ y aplicando el teorema de los residuos sobre un recinto apropiado.
- c) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi x}{3}}}{\text{ch}(\pi x)} dx$ usando como recinto el rectángulo de vértices: $-a$, a , $a + i$, $-a + i$.
2. Sean: $I_1 = \int_0^{\infty} x^a \cos x dx$, $I_2 = \int_0^{\infty} x^a \text{sen} x dx$, $-1 < a < 0$. Demostrar, integrando sobre un contorno adecuado la función $z^a e^{iz}$, que $I_1 = -I_2 \cdot \text{tg}(\frac{\pi a}{2})$.
3. Probar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
4. Para $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, calcular:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2 \cos(2\theta)} \cos(x^2 \text{sen}(2\theta)) dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2 \cos(2\theta)} \text{sen}(x^2 \text{sen}(2\theta)) dx$$

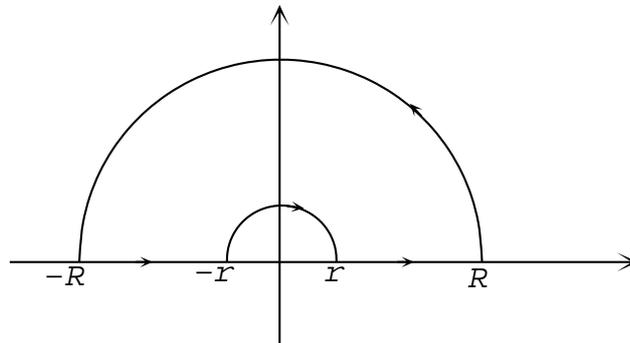
integrando la función e^{-z^2} sobre el contorno



5. Dado $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, calcular las integrales:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2} dx$$

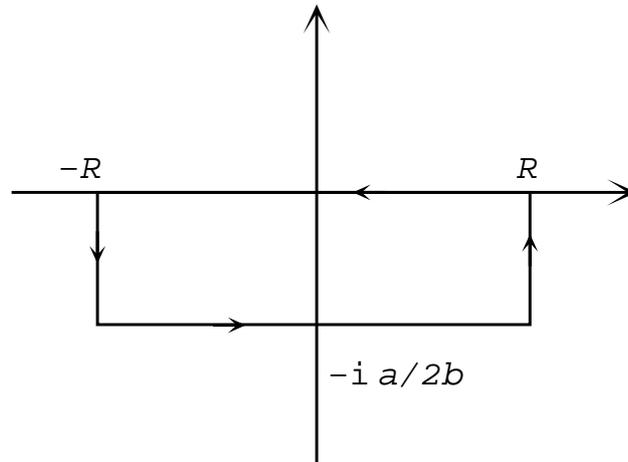
integrando (respectivamente) las funciones $\frac{\log z}{z^2 + a^2}$ y $\frac{(\log z)^2}{z^2 + a^2}$ sobre el contorno



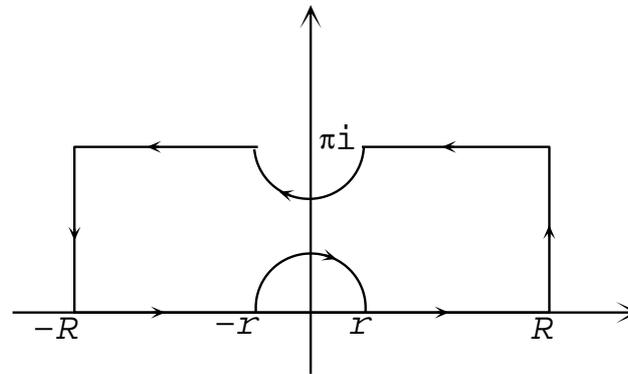
6. Calcular el valor principal de:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x} \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$$

7. Calcular la integral de Gauss: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax - bx^2} dx$, $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, completando cuadrados en el exponente del integrando y aplicando el teorema de los residuos en el contorno:



8. Calcular $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x} dx$ integrando $\frac{e^{iz}}{\operatorname{sh} z}$ en el recinto:



9. a) Calcular las integrales de Fresnel

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx \qquad \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx$$

b) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\theta x) dx$, $\lambda, \theta > 0$.

10. Calcular

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx & \text{b)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta, a^2 < 1 \\ \text{c)} \int_0^{\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2} dx & \text{d)} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2}, a > 1 \end{array}$$

11. Probar que

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

c) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+1} dx = 0$

d) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

e) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4}$

f) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

12. Sea γ_n el borde del rectángulo de vértices: $n + \frac{1}{2} + ni$; $-n - \frac{1}{2} + ni$; $-n - \frac{1}{2} - ni$; $n + \frac{1}{2} - ni$.

a) Calcular $\int_{\gamma_n} \frac{\pi \operatorname{cotg}(\pi z)}{(z+a)^2} dz$ para $a \notin \mathbb{Z}$.

b) Mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi \operatorname{cotg}(\pi z)}{(z+a)^2} dz = 0$

c) Deducir que $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$

Sugerencia: usar que $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ y que $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$, para mostrar que si n es suficientemente grande: $|\operatorname{cotg}(\pi z)| \leq 2$, para todo $z \in \operatorname{Im}(\gamma_n)$.

d) Deducir que: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

13. a) Verificar que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformemente a cero en \mathbb{R} pero que (f_n) no converge a cero en media cuadrática.

- b) Verificar que $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$ pero que (f_n) no converge en media cuadrática en $[0, +\infty)$.
- c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

14. Sea f integrable en $[-p, p]$ y tal que $f(x + 2p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Probar que:

$$\star \int_{a-p}^{a+p} f(t)dt = \int_{-p}^p f(t)dt \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$

$$\star \int_{2p}^{2p+x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$

b) Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Probar que:

$$g(x + 2p) = g(x) \iff \int_{-p}^p f(t)dt = 0$$

15. Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable y tal que se extiende a \mathbb{R} con período 2π . Sean c_n ($n \in \mathbb{Z}$), a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) y b_n ($n \in \mathbb{N}$) los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

- a) Calcular c_n en función de a_n y b_n suponiendo que $\bar{c}_n = c_{-n}$ y comprobar que esta relación se cumple cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ obtener el de $f(-x)$.
- c) Si $f_p(x)$ y $f_i(x)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $f(x)$, obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de $f(x)$.

16. a) Hallar la serie trigonométrica de Fourier de $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ para:

$$(i) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = x$$

$$(iii) f(x) = x^2$$

$$(iv) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

b) Usando (iii), calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$, y extendiendo f por periodicidad a \mathbb{R} , probar que:

$$(i) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\text{sen}(nt)}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2)$$

$$(ii) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

17. a) A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función 2π -periódica que coincide con e^x en $(-\pi, \pi)$, calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en a), a partir del desarrollo en serie exponencial.

18. a) Si $f(x) = |\text{sen } x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, probar que $f(x)$ es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

b) Sumar las series:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{16n^2 - 1} \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

c) Usando la igualdad de Parseval, sumar la serie: $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$

19. Sea f una función de período 2π que en $[-\pi, \pi]$ se define como $f(x) = \cos(ax)$ ($a \in \mathbb{R}$).

a) Desarrollar f en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n^2 - b^2)^2}$, $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

20. Desarrollar en serie exponencial de Fourier $f(x) = \text{sen } x$, $0 \leq x \leq 1$. A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de f .

21. a) Obtener la serie exponencial de Fourier de $f(x) = e^{\alpha e^{ix}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

b) Probar que: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha \cos x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

22. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , -1 < x \leq 0 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x+2) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a $f(x)$ para todo x .

23. Probar que si f es integrable y $2p$ -periódica:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)(p-x) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{nw_0}$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $w_0 = \frac{\pi}{p}$.

Sugerencia: usar el ejercicio 14 e integración por partes.

24. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en $(0, \pi)$:

$$\text{a) } f(x) = \cos x \qquad \text{b) } f(x) = -x \qquad \text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

25. Sean: $f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & , x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ y $g(x) = x$, $0 \leq x < \pi$.

a) Calcular los desarrollos en serie de Fourier de senos de f y g y estudiar la convergencia puntual de ambas series.

b) Hallar la suma de la serie: $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4n^2} \right)$

26. Sea f $2p$ -periódica e integrable. Se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx - \frac{1}{2}at$$

donde $a = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$. Demostrar que F es $2p$ -periódica.

27. Sea f $2p$ -periódica y continua a trozos (i.e., f tiene finitas discontinuidades en cada período y todas son saltos.) Sean $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x))$ la serie

de Fourier de f y $F(t) = \int_0^t f(x)dx - \frac{1}{2}at$. Probar que:

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(-\frac{b_n}{n\omega} \cos(n\omega x) + \frac{a_n}{n\omega} \operatorname{sen}(n\omega x) \right)$$

28. Sean f y g funciones derivables y $2p$ -periódicas con desarrollos exponenciales de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t} \quad , \quad \omega = \frac{\pi}{p}$$

Probar que la función $h(t) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t-x)g(x)dx$ también es derivable y $2p$ -periódica y se puede expresar como:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{in\omega t}$$

29. a) Probar que la serie $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ no es la serie de Fourier de ninguna función.

b) Calcular la n -ésima suma parcial de esta serie.

30. Sean $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ 2π -periódica y $g(x) = 1$ en $(-\pi, \pi)$, también 2π -periódica.

a) ¿Qué relación hay entre f y g ?

b) Calcular las series de Fourier de f y de g .

c) Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f . ¿Es la serie de Fourier de g ? ¿Converge?

31. Dadas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{cos} x$ en $(0, \pi)$, sean:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \quad T(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{n \cdot \operatorname{sen}(2nx)}{4n^2 - 1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de f y de g .

- a) ¿Se puede afirmar que $f(x) = S(x)$ y que $g(x) = T(x)$?
- b) ¿Es lícito obtener $T(x)$ derivando término a término $S(x)$?
- c) ¿Es lícito obtener $S(x)$ derivando término a término $T(x)$?

Sugerencia: graficar las extensiones de f y de g a \mathbb{R} .

32. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & , -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & , -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Sea $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \text{sen}((2n+1)x)$ convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$, entonces $f = g$.

33. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódicas dadas por:

$$f(x) = x \text{ en } [0, 2\pi) \quad \text{y} \quad g(x) = x \text{ en } [-\pi, \pi)$$

- a) Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de f y de g y estudiar la convergencia puntual de dichas series.
- b) Determinar $h(x) = \pi - 4 \sum_{n \geq 0} \frac{\text{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$ y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de h .

34. Desarrollar $\text{sen}^5 t$ en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

Sugerencia: escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

35. a) Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r \cos t} \cos(rsent) \quad g(t) = e^{r \cos t} \text{sen}(rsent)$$

- b) Idem para $h(t) = \frac{1}{1 - r e^{it}}$, $0 < r < 1$.

36. Encontrar los valores A_1 , A_2 y A_3 de modo que la función

$$y = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función $f(x) = 1$ en $(0, 2)$.

- 37.** Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(a, b, c) = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b \cos x - c \operatorname{sen} x)^2 dx$. Determinar el punto donde F alcanza su mínimo.