Práctica 8

1. Sean f_n , $f \in L^2$, $n \geq 1$. Probar:

$$f_n \longrightarrow f \text{ en media cuadrática } \Rightarrow \int_a^b |f_n - f|^2 dx \longrightarrow 0 \text{ para todo } a < b.$$

2. Para cada una de las siguientes funciones, considerar la sucesión:

$$f_N(t) = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-itx} dx$$

y estudiar su convergencia puntual y uniforme.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(Ax)}{x}$ $(A > 0)$ **f)** $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

3. Sean $f, g \in G(\mathbb{R})$. Probar las siguientes propiedades de la convolución:

a) $f * g = g * f$

b) $f * (g * h) = (f * g) * h$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \right)$

4. Sea $f \in G(\mathbb{R})$. Probar:

a) $g(x) = e^{iax} f(x) \Rightarrow g \in L^1$ y $\hat{g}(t) = \hat{f}(t - a)$

b) $g(x) = f(x + a) \Rightarrow g \in L^1$ y $\hat{g}(t) = e^{iat} \hat{f}(t)$

c) $g \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$

d) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g} = \overline{\hat{f}}$

e) $g(x) = f(\frac{x}{a})$, $a > 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = a.\hat{f}(at)$

f) $g(x) = ixf(x)$ y $g \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ derivable y $\hat{f}' = \hat{g}$

g) $f^{(n)} \in C^n \Rightarrow \widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n \hat{f}(t)$

h) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re}(\hat{f})$ es par e $\operatorname{Im}(\hat{f})$ es impar.

i) $g(x) = f(ax+b)$, $a \neq 0 \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ibt}{a}} \hat{f}(\frac{t}{a})$

j) $g(x) = f(x).\cos(ax) \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \dfrac{\hat{f}(t+a) + \hat{f}(t-a)}{2}$

k) $g(x) = f(x).\mathrm{sen}(ax) \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \dfrac{\hat{f}(t-a) - \hat{f}(t+a)}{2i}$

l) f continua y $\hat{f} \in G(\mathbb{R}) \;\Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$

5. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones de L^1

a) $e^{-|x|}$ **b)** $\dfrac{1}{1+x^2}$ **c)** e^{-ax^2}

d) $\begin{cases} e^{-ax} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ $(a > 0)$ **e)** $\begin{cases} 0 & , |x| > A \\ 1 & , |x| < A \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 1 & , 0 \leq x < a \\ 0 & , x \notin [0, a) \end{cases}$

6. Sea $f \in G(\mathbb{R})$ y $f_N(t) = \displaystyle\int_{-N}^{N} f(x).e^{-itx}dx$, $N \in \mathbb{N}$. Probar que: $f_N \to \hat{f}$ uniformemente en $\mathbb{R}$.

7. Sean $f, g \in L^2$ y continuas a trozos.

a) Deducir a partir de la desigualdad triangular que $f \pm g, f \pm ig \in L^2$.

b) Usar la igualdad de Parseval para probar que:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm \hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm g|^2 dt$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm i\hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm ig|^2 dt$

c) Probar la ecuación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$$

8. Calcular usando Parseval:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2} dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{-ita}}{it} \right|^2 dt$ $(a > 0)$ **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(at).\mathrm{sen}(bt)}{t^2} dt$

9. Sea $f \in L^2$ y tal que $\hat{f}_N \to g$ uniformemente sobre cada intervalo finito. Probar que $\hat{f} - g$ es una función nula sobre cada intervalo finito (i.e., $\displaystyle\int_a^b |\hat{f} - g|^2 dx = 0$ para todo $a < b$).

Concluir que en tal caso $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}-g|^2 dx = 0$

Nota: las f_N son las definidas en el ejercicio 6.

10. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^2

a) $\dfrac{x}{x^2+1}$ **b)** $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ **c)** $\dfrac{x^3}{1+x^4}$

d) $\dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}$ **e)** $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ **f)** $\dfrac{\operatorname{sen}(Ax)}{x}$ $(A>0)$

11. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

a) $e^{-a(x-b)^2}$ $(a>0, b\in\mathbb{R})$ **b)** $e^{-x^2}\operatorname{sen}(ax)$ **c)** $\dfrac{1}{x^2+a^2}$

12. Hallar las transformadas inversas de Fourier de:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(au)}{u}$ **b)** $\dfrac{1-\cos(au)}{u}$ **c)** e^{-u^2} **d)** $\dfrac{u}{u^2+1}$

13. a) Hallar la transformada inversa de Fourier de: $g(u) = \dfrac{1}{(u^2+1)^2}$ interpretándola como la transformada de una convolución.

b) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} g(y)dy$ en función de $\hat{g}$.

14. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \le 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$.

a) Comprobar que $\hat{f}(t) = 2\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$.

b) Verificar que:

(i) $h(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [c,d] \\ 0 & , x \notin [c,d] \end{cases} = f\left(\dfrac{2}{d-c}x + \dfrac{d+c}{d-c}\right)$

(ii) $k(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & , x \in [0,\pi] \\ 0 & , x \notin [0,\pi] \end{cases} = \operatorname{sen} x . f\left(\dfrac{2}{\pi}x - 1\right)$

c) Calcular $\hat{h}$ y $\hat{k}$ usando el ejercicio 4.

15. Función Gama

La función $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

se llama FUNCIÓN GAMA.

a) Probar que:
$\star$ $\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0$
$\star$ $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$

b) Dado $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Re}(z) < 0$ se define:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

si $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{Re}(z+n) > 0$. Mostrar que la definición no depende del $n \in \mathbb{N}$ elegido.

c) Probar que $\Gamma(z)$ converge uniformemente en toda faja vertical $0 < \varepsilon \leq \mathrm{Re}(z) \leq M$
Deducir de c) y de b) que Γ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\leq 0}$

16. Hallar la transformada de Laplace de:
a) $\mathrm{sen}x$ **b)** x^3 **c)** $(x+b)^2$

17. Para $s > 0$ y $p > -1$, probar que: $\mathcal{L}(t^p)(s) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$

18. Hallar la transformada inversa de Laplace de:
a) s^{-2} **b)** $s^{\frac{-1}{2}}$ **c)** $(s^2-a^2)^{-1}$
d) $(s^3+a^3)^{-1}$ **e)** $\dfrac{e^{-as}}{s^2}$ **f)** $\dfrac{1}{s^2+s+2}$
g) $(s-2)^{\frac{-1}{2}}$ **h** $\dfrac{4-5s}{s^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{s^2+2s}$ **i)** $\dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}$
j) $\dfrac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}$ **k)** $\log(1+s^{-1})$ **l)** $\log\left(\dfrac{s+6}{s+2}\right)$

19. **a)** Hallar f tal que:
(i) $f(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-u)e^u du + 2t - 3$
(ii) $f(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t f(t)\mathrm{sen}(t-u)du$

b) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}\right)(t)$

c) Probar que $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{\frac{-1}{s}}}{\sqrt{s}}\right)(t) = \dfrac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$, $s, t > 0$.

20. Resolver, para $x > 0$:

a) $u'' + 2u' + u = e^{-x}$ con: $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + u' + u = \text{sen}x$ con: $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

c) $x.u'' + u' + x.u = 0$ con: $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$

NOTA: en **c)** hallar la transformada de Laplace de u.

Notaciones y definiciones

⋆ $G(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ / f es continua a trozos, con derivadas laterales finitas en todo punto y absolutamente integrable en $\mathbb{R}\}$

⋆ $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\, dt$, $f \in g(\mathbb{R})$

⋆ $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\, dt$, $f, g \in g(\mathbb{R})$