Práctica 3

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ derivable en a.

a) Calcular:
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad ; \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{ih}$$

b) ¿Cuánto vale $f'(a)$?

c) ¿Dónde es derivable la función $f(z) = |z|^2$?

2. Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ y $g(x,y) = f(x+iy)$.

a) Probar que si f es derivable en $a+ib$, entonces g es diferenciable en (a,b). Calcular $Dg(a,b)$.

b) ¿Es cierto que si g es diferenciable en (a,b) entonces f es derivable en $a+ib$?

c) Hallar todas las funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ derivables en todo punto.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en $a \in \mathbb{C}$. Probar que existe $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}-$lineal , tal que
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-\alpha(h)}{h} = 0$$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre sus partes real e imaginaria de modo que resulte derivable en $a \in \mathbb{R}$.

5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en $a \in \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

a) Calcular:
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad ; \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{ih}$$

en términos de u y de v. ¿Qué se deduce?

b) Suponiendo que u y v son de clase C^2, calcular $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ en a.

c) Calcular $|f'(a)|$ en términos de u y de v.

6. a) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ derivable en $a+ib$ y sea $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Probar que g es diferenciable en (a,b).

b) ¿Es cierto que si f es abierta g también lo es? ¿Y el recíproco?

7. Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \qquad\qquad g(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3 + i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & , x+iy \neq 0 \\ 0 & , x+iy = 0 \end{cases}$$

Demostrar que f, g son continuas en 0 y que cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann pero no son derivables.

8. Dada la función

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y + i(x^2 y^2)}{x^4 + y^2} & , x+iy \neq 0 \\ 0 & , x+iy = 0 \end{cases}$$

a) verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en el $(0,0)$.

b) probar que hay derivada a lo largo de cualquier recta que pasa por $(0,0)$ y que todas esas derivadas coinciden.

c) probar que f no es derivable en $z = 0$.

9. Verificar que valen todas las reglas de derivación conocidas para el caso de funciones reales de variable real.

10. a) Mostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares se escriben:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

b) Escribir $f'(z)$ en coordenadas polares.

11. Determinar los puntos donde f es derivable y donde es holomorfa.

a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x+iy}{x^2+y^2} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$

b) $f(z) = \overline{z}$

c) $f(z) = x^2 + iy^2$

d) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

12. Determinar si las siguientes funciones son holomorfas en los conjuntos especificados y, en caso de no serlo, encontrar un conjunto abierto en el que la función sea holomorfa o bien demostrar que no es holomorfa en ninguna parte.

a) $f(z) = \dfrac{3+2z}{i+2z}$ en $D : |z| < 1$

b) $f(z) = \cos x$ en $D : |z| < 1$

c) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x)$ en $\mathbb{C}$

d) $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ en $\mathbb{C}$ $(P\ ,\ Q$ polinomios$)$

e) $f(z) = \dfrac{P(z).Q(z)}{z}$ en $D : 0 < |z| < 1$ $(P\ ,\ Q$ polinomios$)$

13. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones y hallar $f'(z)$ en cada caso.

a) $f(z) = z^3 - 2z$

b) $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$

c) $f(z) = z^2\overline{z}$

d) $f(z) = x^2 + iy^3$

e) $f(z) = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$

14. Sean $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, Ω abierto. Probar que:

a) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x,y) - Du(x,y)(h,k)}{h+ik} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{v(x+h, y+k) - v(x,y) - Dv(x,y)(h,k)}{h+ik} = 0$

c) Deducir que si u y v satisfacen las condiciones de Cauchy- Riemann en Ω, entonces $f = u + iv$ es holomorfa en Ω. Calcular $f'(z)$ en términos de u y de v.

15. Demostrar que si $f(z)$ es holomorfa en una dominio (abierto conexo) R y $g(x,y) = f(x+iy)$ entonces:

$$f'(z) = \frac{\partial g}{\partial x} = -i\frac{\partial g}{\partial y}$$

16. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para la cual existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa. Probar que dos de tales v difieren en una constante aditiva. ¿Falta alguna hipótesis?

17. Probar:

a) El conjunto de holomorfía de una función f es abierto.

b) Si f y $\overline{f}$ son holomorfas en una dominio A, entonces f es constante.

18. Teorema del Valor Medio
Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, entonces

$$|f(b) - f(a)| \ \leq \ 2 \sup_{z \in [a,b]} |f'(z)|.|b - a|$$

19. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Probar:

a) Si f es holomorfa en A y $f' = 0$ en A, entonces f es constante en A.

b) Si f y g son holomorfas en A y $f' = g'$ en A, entonces $f - g$ es constante en A.

¿Es necesaria la hipótesis de conexión?

20. Probar que si u y v son mutuamente conjugadas, son constantes. ¿Falta alguna hipótesis?

21. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar:

a) $\mathrm{Re}(f)$ constante $\Rightarrow$ f constante.

b) $\mathrm{Im}(f)$ constante $\Rightarrow$ f constante.

c) $|f|$ constante $\Rightarrow$ f constante.

d) $\arg(f)$ constante $\Rightarrow$ f constante.

22. Sea $u(x, y) = e^{-x}(x \ \mathrm{sen} y - y \ \cos y)$.

a) Probar que u es armónica.

b) Encontrar v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa.

c) Idem para $u(x, y) = 2x(1 - y)$.

23. Sean u , v armónicas en una dominio R de $\mathbb{C}$. Probar que la siguiente función es holomorfa en R

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

24. **a)** Hallar todas las funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ tales que su parte real es $x^2 - y^2$.

b) Hallar el polinomio armónico más general entre los de la forma:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

Encontrar además la función armónica conjugada y la correspondiente función holomorfa.

c) Encontrar una función f holomorfa en todo el plano complejo cuya parte real sea $e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y)$.

d) Mostrar que $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ es armónica. Indicar su dominio de armonicidad y hallar una función holomorfa que tenga a f como parte imaginaria.

e) Dada $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 se sabe que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = F(xy)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. ¿Cómo debe ser F?

25. ¿Qué se puede decir de $f = u + iv$ si u y v son C^∞ y cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann?
Más adelante se verá que esto es equivalente al hecho de que f sea holomorfa.

26. **Regla de L'Hospital**
Sean f, g funciones holomorfas en a tales que $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Sugerencia: mostrar que $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \eta(z)(z-a)$ con η una función tal que $\lim_{z\to a} \eta(z) = 0$.

27. Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$

b) $\displaystyle\lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$

c) $\displaystyle\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z-e^{\frac{\pi i}{3}}}{z^3+1}$

d) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^2-2iz+1}{z^4+2z^2+1}$

28. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $R \subset \mathbb{C}$ y $f(z).f'(z) \neq 0$ para todo $z \in R$, entonces $g(z) = \log|f(z)|$ es armónica en R.

29. **a)** Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, A abierto, $f = u + iv$ con u y v de clase C^1 —más adelante se verá que esta hipótesis es superflua— y tal que $f'(a) \neq 0$ para un $a \in A$. Probar que existe un entorno U de a en A tal que $f(U)$ es entorno de $f(a)$.

b) ¿Qué se deduce si se pide que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in A$?