

Práctica 5

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Se define

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(x)dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(x)dx$$

Probar

a) $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

b) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

2. Calcular

a) $\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$

b) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$ ($\operatorname{Re}(z) > 0$)

c) $\int_1^2 \log(it) dt$

3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, se llama **primitiva** de f a cualquier función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

a) Probar que si F y G son primitivas de f , entonces $F - G$ es constante.

b) **Teorema Fundamental del Cálculo**

Toda función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una primitiva y si F es cualquier primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4. a) Sean γ, σ las poligonales de vértices: $\{1, i\}$ y $\{1, 1 + i, i\}$. Hallar una parametrización de γ y de σ y calcular $\int_{\gamma} f$ y $\int_{\sigma} f$, donde $f(z) = |z|^2$.

b) Deducir que en el plano complejo deja de ser cierto que toda función continua tiene primitiva.

5. Calcular: $\int_{\gamma} 3z dz$ y $\int_{\gamma} 3|z| dz$, para

- a) γ : segmento que une -1 con 1
- b) γ : $|z| = 1$ de -1 a 1
- c) γ : poligonal de vértices $-1, i, 1$

6. Calcular $\int_c z^2 dz$ cuando c es:

- a) la porción de parábola $x = y^2$ comprendida entre $(0,0)$ y $(1,1)$
- b) el arco de circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$
- c) la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$
- d) el triángulo de vértices $(0,0), (1,1)$ y $(-1,1)$

7. Calcular

a) $\int_C e^z dz$ si $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ recorrida una vez en sentido positivo.

b) $\int_0^1 x dz$ uniendo ambos puntos con un segmento y luego con la poligonal de vértices: $0, i, 1$.

c) $\int_{|z-a|=r} (z-a)^m dz$ para cada $m \in \mathbb{Z}$, recorriendo la curva una vez en sentido positivo.

8. Sea γ el polígono cerrado de vértices: $1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$. Hallar $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$.

9. Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ diferenciable a trozos y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Se define:

$$\int_{\gamma} f|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

a) ¿Qué se obtiene cuando $f \equiv 1$?

b) Calcular $\int_{\gamma} |dz|$ para $\gamma: |z-a| = r$.

c) Probar

(i) $\int_{\gamma \circ \sigma} f|dz| = \int_{\gamma} f|dz|$ si $\sigma : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ es diferenciable.

(ii) $\int_{-\gamma} f|dz| = \int_{\gamma} f|dz|$

(iii) $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz|$

(iv) Deducir que si $|f(z)| \leq M$ y $\ell = \text{long}(\gamma)$, entonces $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq M\ell$.

10. Calcular

a) $\int_{\gamma} x dx$, γ : segmento de 0 a $1 + i$

b) $\int_{|z|=r} x dz$

c) $\int_{|z|=1} |z - 1| |dz|$

d) $\int_C \text{sen} z dz$, $C : z(t) = it$, $0 \leq t \leq \pi$

e) $\int_C z^n dz$, $C : z(t) = ae^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}$

f) $\int_C z^n dz$, $C : z(t) = ae^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}$

g) $\int_{\gamma} f(x) dx + g(y) dy$, γ : curva simple cerrada, f, g continuas.

h) $\int_C \frac{dz}{z - 2}$, $C : |z - 2| = 4$

i) $\int_C \frac{dz}{z - 2}$, $C : |z - 1| = 5$

j) $\int_{\gamma} (x^2 + iy^2) |dz|$, $\gamma : |z| = 2$

k) $\int_{|z-1|=1} \bar{z}^2 dz$

11. Hallar $\int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}} dz$, donde:

a) $\gamma : |z| = 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0$, de 1 a -1 .

b) $\gamma : |z| = 1, \operatorname{Im}(z) \leq 0$, de 1 a -1 .

12. a) Sea $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar $\int_{\gamma} (z^2 - 1)^{-1} dz$.

b) Idem para $\gamma(t) = 2e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

13. Sean γ una curva simple y cerrada en un abierto G y $a \notin G$. Mostrar que para $n \geq 2$ es $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = 0$.

14. Sea $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ una curva diferenciable que une los puntos $z_1 = \gamma(a)$ y $z_2 = \gamma(b)$.

a) Probar que $\int_{\gamma} F'(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$.

b) Deducir que $\int_{\gamma} F'(z) dz$ no depende de γ .

NOTA: usar sin demostrar que F' es continua.

15. Integración por partes

Sea G un abierto de \mathbb{C} , f, g holomorfas en G y γ una curva diferenciable con extremos a y b contenida en G . Probar que:

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z) dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{\gamma} f'(z)g(z) dz$$

16. Sea f holomorfa en un abierto conexo Ω tal que $|f(z) - 1| < 1$ en Ω . Mostrar que $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ para cualquier curva cerrada γ contenida en Ω .

NOTA: f' es continua.

17. Sean $f : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ la rama principal del logaritmo y $g : \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ la rama del logaritmo que verifica $g(1) = 2\pi i$.

a) Escribir, si es posible, g en términos de f indicando dónde vale esa relación.

b) Calcular $\int_{\gamma} f(z)dz$ siendo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ una curva que une 1 con i .

18. Sean γ una curva diferenciable a trozos, $(f_n)_{n \geq 1}$, f funciones continuas en $\text{Im}(\gamma)$ y tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $\text{Im}(\gamma)$. Probar que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz$$

19. Sea $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 .

a) Para cada $s \in [a, b]$ fijo, sea $f_s : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_s(t) = \varphi(s, t)$. Probar que

$$f'_s(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t)$$

para todo $t \in [c, d]$.

b) Probar que dado $s \in [a, b]$ fijo, resulta

$$\varphi(s, t_2) - \varphi(s, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, u)du$$

20. Regla de Leibniz

Sea $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(t) = \int_a^b \varphi(s, t)ds$.

Entonces:

a) g es continua.

b) Si $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ entonces g es C^1 y $g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t)ds$

21. Sea D un abierto conexo de \mathbb{C} y F, G primitivas de $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Probar que $F - G$ es constante.

22. Teorema del Valor Medio

Sea f holomorfa en $|z - a| \leq r$, $r > 0$. Probar que:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$$

23. Determinar el dominio de holomorfa de la funci3n f y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para demostrar que $\int_C f(z)dz = 0$ cuando $C : |z| = 1$, siendo:

$$\text{a) } f(z) = \frac{z^2}{z-3}$$

$$\text{b) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$$

$$\text{c) } f(z) = ze^{-z}$$

24. Calcular

$$\text{a) } \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$$

$$\text{b) } \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz, \gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{c) } \int_{\gamma} \frac{\text{sen}z}{z^3} dz, \gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{d) } \int_{\gamma} \frac{\log z}{z^n} dz, \gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, n \geq 0.$$

$$\text{e) } \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}, \gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

25. Desigualdades de Cauchy

Sea f holomorfa en $B(a, R)$ y tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in B(a, R)$. Probar que en tal caso:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

26. Mostrar que las derivadas sucesivas de una función holomorfa en un punto z no pueden satisfacer:

$$|f^{(n)}(z)| > n!.n^n$$

27. Calcular:

$$\text{a) } \int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz, \gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{b) } \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - \frac{1}{2})^n}, \gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) } \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}, \gamma(t) = 2\pi e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{d) } \int_{\gamma} \frac{\text{sen}z}{z} dz, \gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{e) } \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz, \gamma(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, r \in \mathbb{R}_{>0} - \{2\}$$

- 28.** Hallar todas las f holomorfas en $|z| \leq 1$ tales que $|f(z)| \leq \sqrt{5}$ cuando $|z| = 1$ y $f(\frac{1}{3}) = 2 + i$.
- 29.** Encontrar los desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto a , para:
- a) $\frac{e^z - 1}{z}$, $a = 0$ b) ze^z , $a = -1$
- c) $(z + 1)^{-1}$, $a = 1$ d) $\frac{1 - z}{(z + 1)^3}$, $a = 0$
- 30.** Desarrollar la función $f(z) = z^{-1}$ en serie de potencias de $z + 1 - i$.
- 31.** a) ¿Existe f holomorfa en $|z| < 1$ tal que $f(\frac{1}{2n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?
- b) ¿Existe f holomorfa en un entorno de cero tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?
- c) ¿Existe f holomorfa en un entorno de cero tal que $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?
- 32.** Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, G abierto conexo, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in G$ tal que $f(a) = 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$, de modo que $f(z) = (z - a)^n g(z)$ para todo $z \in G$.
- 33.** a) Sea f entera y tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que f es un polinomio.
- b) Sea f entera tal que para algún $k \geq 0$ tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z^k} \right| = 0$. Probar que f es un polinomio de grado menor que k (si $k > 0$) o $f \equiv 0$ (si $k = 0$).
Deducir que si f es entera y acotada entonces f es constante.
- 34.** Sean f, g enteras tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué conclusión se puede deducir?
- 35.** Probar que si la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es convergente en $|z - z_0| < r$, entonces la serie $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ es convergente en este disco y su suma es una primitiva de f .
¿Prueba esto que toda función holomorfa en un abierto D admite primitiva en todo D ?

36. Probar

- a) Si una función f es analítica en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ entonces para todo $a \in D$ la serie de Taylor de f en a converge y tiene por suma $f(z)$ en todo disco abierto $|z - a| < r$, donde $r = d(a, \mathbb{C} - D)$.
- b) Si f es entera coincide con su serie de Taylor en cualquier punto a , en todo \mathbb{C} .
- c) Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. ¿Se puede encontrar siempre una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z_0 \in D$, tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ en D .

- 37. a)** Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que restringida a \mathbb{R} tiene radio de convergencia ∞ . Probar que f es entera.

- b) Dar una interpretación del hecho que la función real $\frac{1}{1+x^2}$ es indefinidamente derivable en \mathbb{R} pero no es desarrollable en serie de potencias de radio ∞ .