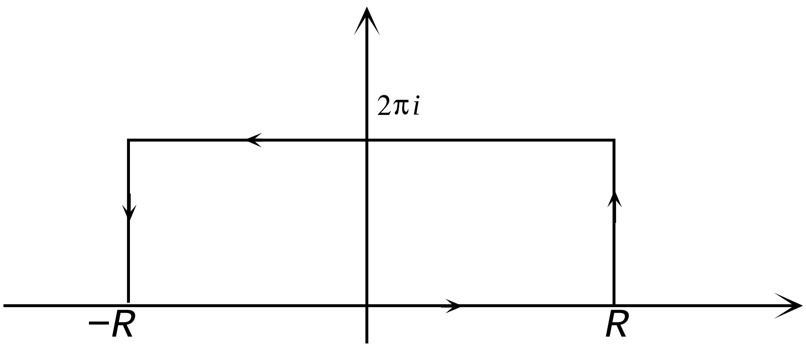
Práctica 7

1. **a)** Verificar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(a\pi)}$, $0 < a < 1$, integrando la función $\displaystyle\frac{e^{az}}{1+e^z}$ en:



b) Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}dx$ considerando la función $\displaystyle\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ y aplicando el teorema de los residuos sobre un recinto apropiado.

c) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi x}{3}}}{\mathrm{ch}(\pi x)}dx$ usando como recinto el rectángulo de vértices: $-a$, a , $a+i$, $-a+i$.

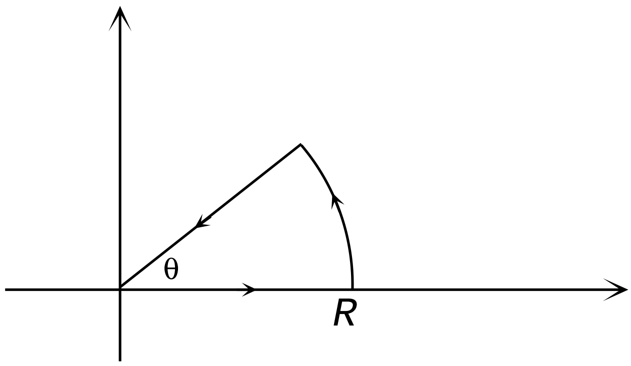
2. Sean: $I_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} x^a \cos x dx$, $I_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} x^a \mathrm{sen} x dx$, $-1 < a < 0$. Demostrar, integrando sobre un contorno adecuado la función $z^a e^{iz}$, que $I_1 = -I_2 \,.\, \mathrm{tg}(\frac{\pi a}{2})$.

3. Probar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

4. Para $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, calcular:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2\cos(2\theta)}\cos(x^2\mathrm{sen}(2\theta))dx \;\; y \;\; \int_0^{\infty} e^{-x^2\cos(2\theta)}\mathrm{sen}(x^2\mathrm{sen}(2\theta))dx$$

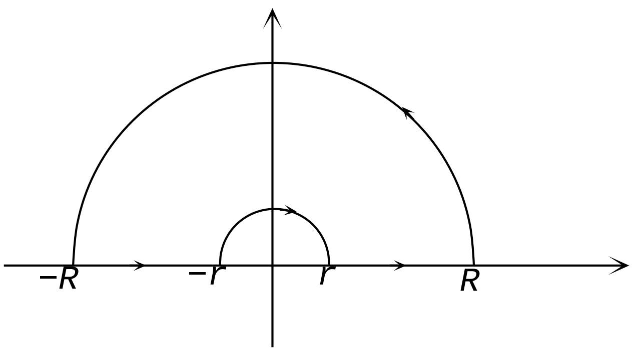
integrando la función e^{-z^2} sobre el contorno



5. Dado $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, calcular las integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+a^2}dx$$

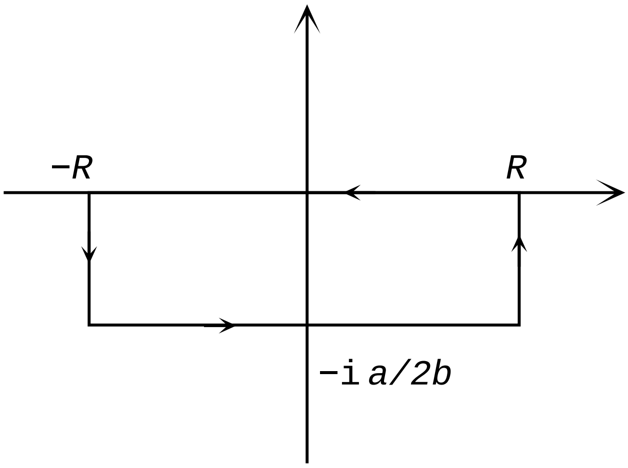
integrando (respectivamente) las funciones $\dfrac{\log z}{z^2+a^2}$ y $\dfrac{(\log z)^2}{z^2+a^2}$ sobre el contorno



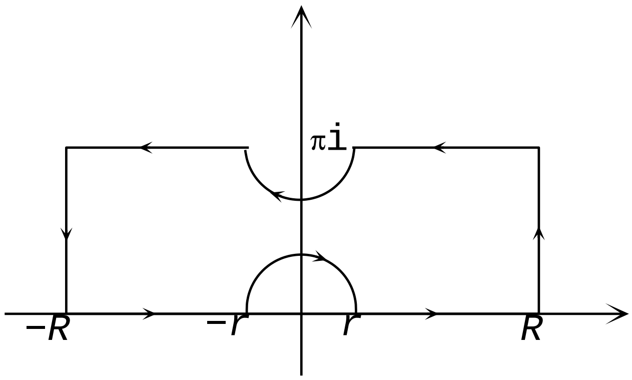
6. Calcular el valor principal de:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^3-4x^2+5x}$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4)(x-1)}dx$

7. Calcular la integral de Gauss: $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{iax-bx^2}dx$, a , $b \in \mathbb{R}_{>0}$, completando cuadrados en el exponente del integrando y aplicando el teorema de los residuos en el contorno:



8. Calcular $\int_0^\infty \frac{\text{sen}x}{\text{sh}x}dx$ integrando $\frac{e^{iz}}{\text{sh}z}$ en el recinto:



9. a) Calcular las integrales de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx \qquad\qquad \int_0^\infty \text{sen}(x^2)dx$$

b) Calcular $\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\theta x)dx \quad , \quad \lambda\ , \theta > 0.$

10. Calcular

a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$ **b)** $\int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta\ ,\ a^2<1$

c) $\int_0^\infty \frac{\cos x-1}{x^2}dx$ **d)** $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}\ ,\ a>1$

11. Probar que

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{x^2+1}dx = 0$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{4}$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

12. **a)** Verificar que

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$ pero que (f_n) *no* converge a cero en media cuadrática.

b) Verificar que $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$ converge puntualmente a cero en [0,1] pero que (f_n) *no* converge en media cuadrática en $[0, +\infty)$.

c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

13. Sea f integrable en $[-p, p]$ y tal que $f(x + 2p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Probar que:

$$\star \int_{a-p}^{a+p} f(t)dt = \int_{-p}^{p} f(t)dt \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$

$$\star \int_{2p}^{2p+x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$

b) Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Probar que:

$$g(x + 2p) = g(x) \iff \int_{-p}^{p} f(t)dt = 0$$

14. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrable y tal que se extiende a $\mathbb{R}$ con período 2π. Sean c_n $(n \in \mathbb{Z})$, a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ y b_n $(n \in \mathbb{N})$ los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

a) Calcular c_n en función de a_n y b_n suponiendo que $\bar{c}_n = c_{-n}$ y comprobar que esta relación se cumple cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ obtener el de $f(-x)$.

c) Si $f_p(x)$ y $f_i(x)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $f(x)$, obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de $f(x)$.

15. **a)** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ para:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = x$

(iii) $f(x) = x^2$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \text{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) Usando **(iii)**, calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$, y extendiendo f por periodicidad a $\mathbb{R}$, probar que:

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\text{sen}(nt)}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2)$

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

16. **a)** A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función $2\pi-$periódica que coincide con e^x en $(-\pi, \pi)$, calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en **a)**, a partir del desarrollo en serie exponencial.

17. **a)** Si $f(x) = |\text{sen}x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, probar que $f(x)$ es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

b) Sumar las series:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{16n^2 - 1} \qquad\qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

c) Usando la igualdad de Parseval, sumar la serie: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$

18. Sea f una función de período 2π que –en $[-\pi, \pi]$– se define como $f(x) = \cos(ax)$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Desarrollar f en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^2 - b^2)^2}$, $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

19. Desarrollar en serie exponencial de Fourier $f(x) = \text{sen}x$, $0 \leq x \leq 1$. A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de f.

20. **a)** Obtener la serie exponencial de Fourier de $f(x) = e^{\alpha e^{ix}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

b) Probar que: $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha \cos x} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

21. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , -1 < x \leq 0 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(x+2) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a $f(x)$ para todo x.

22. Probar que si f es integrable y $2p-$periódica:

$$\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)(p - x)dx = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n w_0}$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $w_0 = \dfrac{\pi}{p}$.

Sugerencia: usar el ejercicio 13 e integración por partes.

23. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en $(0,\pi)$:

a) $f(x) = \cos x$ **b)** $f(x) = -x$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

24. Sean: $f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & , x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ y $g(x) = x$, $0 \leq x < \pi$.

a) Calcular los desarrollos en serie de Fourier de senos de f y g y estudiar la convergencia puntual de ambas series.

b) Hallar la suma de la serie: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4n^2} \right)$

25. Sea f $2p-$periódica e integrable. Se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx - \frac{1}{2}at$$

donde $a = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)dx$. Demostrar que F es $2p-$periódica.

26. Sean f y g funciones derivables y $2p-$periódicas con desarrollos exponenciales de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t} \quad , \quad \omega = \frac{\pi}{p}$$

Probar que la función $h(t) = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t-x)g(x)dx$ también es derivable y $2p-$periódica y se puede expresar como:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{in\omega t}$$

27. **a)** Probar que la serie $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$ no es la serie de Fourier de ninguna función.

b) Calcular la $n-$ésima suma parcial de esta serie.

28. Sean $f(x)=x$ en $(-\pi,\pi)$ $2\pi-$periódica y $g(x)=1$ en $(-\pi,\pi)$, también $2\pi-$periódica.

a) ¿Qué relación hay entre f y g?

b) Calcular las series de Fourier de f y de g.

c) Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f. ¿Es la serie de Fourier de g? ¿Converge?

29. Dadas $f(x)=\mathrm{sen}x$ y $g(x)=\cos x$ en $(0,\pi)$, sean:

$$S(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \qquad\qquad T(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{n.\mathrm{sen}(2nx)}{4n^2-1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de f y de g.

a) ¿Se puede afirmar que $f(x)=S(x)$ y que $g(x)=T(x)$?

b) ¿Es lícito obtener $T(x)$ derivando término a término $S(x)$?

c) ¿Es lícito obtener $S(x)$ derivando término a término $T(x)$?

Sugerencia: graficar las extesiones de f y de g a $\mathbb{R}$.

30. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2\pi-$periódica dada por:

$$g(x)=\begin{cases}-\pi-x & ,\ -\pi\leq x<-\frac{\pi}{2}\\ x & ,\ -\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{\pi}{2}\\ \pi-x & ,\ \frac{\pi}{2}\leq x<\pi\end{cases}$$

Sea $f(x)=\sum_{n\geq 1}b_n\mathrm{sen}((2n+1)x)$ convergente para todo $x\in\mathbb{R}$. Probar que si $f(x)=g(x)$ para todo $x\in(0,\pi)$, entonces $f=g$.

31. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2\pi-$periódicas dadas por:

$$f(x)=x \ \text{ en } \ [0,2\pi) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad g(x)=x \ \text{ en } \ [-\pi,\pi)$$

a) Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de f y de g y estudiar la convergencia puntual de dichas series.

b) Determinar $h(x) = \pi - 4\sum_{n\geq 0} \dfrac{\text{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$ y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de h.

32. Desarrollar $\text{sen}^5 t$ en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.
Sugerencia: escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

33. a) Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r\cos t}\cos(r\,\text{sen}t) \qquad\qquad g(t) = e^{r\cos t}\text{sen}(r\,\text{sen}t)$$

b) Idem para $h(t) = \dfrac{1}{1 - re^{it}}$, $0 < r < 1$.

34. Encontrar los valores A_1, A_2 y A_3 de modo que la función

$$y = A_1\text{sen}(\frac{\pi x}{2}) + A_2\text{sen}(\pi x) + A_3\text{sen}(\frac{3\pi}{2x})$$

sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función $f(x) = 1$ en $(0, 2)$.

35. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(a, b, c) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b\cos x - c\,\text{sen}x)^2 dx$. Determinar el punto donde F alcanza su mínimo.