Práctica 4

1. Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ definida sobre $A \subset \mathbb{R}$, en lo siguientes casos.

a) $f_n(x) = x^n$ $\quad A = (-1, 1]$

b) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ $\quad A = \mathbb{R}$

c) $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ $\quad A = [0, 1]$

d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}$ $\quad A = \mathbb{R}$

e) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ $\quad A = (1, +\infty)$

2. Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en A , para:

a) $f_n(x) = x^n$ $\quad A = (0, \frac{1}{2}]$

b) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n^2+3}\text{sen}(2nx - n\pi)$ $\quad A = \mathbb{R}$

c) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ $\quad A = [2, 5]$

3. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

a) $\dfrac{\text{sen}(nx)}{n}$ en $\mathbb{R}$ **b)** $\text{sen}(\frac{x}{n})$ en $\mathbb{R}$ **c)** z^n en $|z| < 1$

d) $\dfrac{n}{n+1}z$ en $\mathbb{C}$ **e)** $\dfrac{1}{nz}$ en $\mathbb{C}_{\neq 0}$ **f)** nz^2 en $\mathbb{C}$

4. Mostrar que $\dfrac{1}{1+nx}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0, 1)$. Probar que esta sucesión converge uniformemente sobre todo intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$.

5. Criterio de Weierstrass

Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente en X.

6. Sean $(A_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de números complejos tales que $(A_n.v_n)_{n\geq 1}$ converge. Probar que si una de las series:

$$A_0v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1})v_n \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n(v_n - v_{n+1})$$

converge, también lo hace la otra.

7. Criterio de Dedekind

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de números complejos tales que:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene las sumas parciales acotadas
- $\sum_{n=1}^{\infty} v_n - v_{n+1}$ es absolutamente convergente
- $v_n \to 0$

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ es convergente.

8. Criterio de Dirichlet

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0 y existe $M > 0$ tal que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

9. **a)** Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ para $|z| < 1$.

b) Sea $z = re^{i\theta}$ con $0 < r < 1$. Usar **a)** para verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{sen}(n\theta) = \frac{r\text{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

10. Producto de Cauchy

Dadas las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, se llama **producto de Cauchy** de ambas a la serie de término general $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Probar que si ambas series convergen, siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, y al menos una de ellas lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge a AB.

11. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia

† Sobre el borde estudiar únicamente para $z = 1, i, -i$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+(1+i)^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \ (a \in \mathbb{C})$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n \ (a \in \mathbb{C})$ i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)} \ \dagger$ k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$ l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$ o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$

12. **a)** Determinar el conjunto de valores z para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$ converge y hallar su suma.

b) Idem para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$.

13. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+|z|}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi inz}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

14. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ tiene un valor finito en todos los puntos interiores y sobre su círculo de convergencia, pero que esto no es verdadero para la serie de las derivadas.

15. **Exponencial**: $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

a) Probar que es entera y calcular su derivada.

b) Probar que $e^{z+z'} = e^z \ . \ e^{z'}$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$.

c) Calcular: $\left|e^z\right|$, $\arg e^z$, $\mathrm{Re}(e^z)$, $\mathrm{Im}(e^z)$, $\overline{e^z}$

d) Probar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y calcular $1/e^z$.

e) Analizar la existencia de $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} e^z$.

f) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.

g) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tale que $e^z = \pm 1$.

h) Mostrar que $\left|e^z - 1\right| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

16. Funciones trigonométricas

$$\mathrm{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad\qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

a) Probar que $\mathrm{sen} z$, $\cos z$ son enteras y calcular sus derivadas.

b) Probar que

(i) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

(ii) $\mathrm{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

(iii) $\cos^2 z + \mathrm{sen}^2 z = 1$

(iv) $e^{iz} = \cos z + i\,\mathrm{sen} z$

(v) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \mathrm{sen} z\, \mathrm{sen} w$
$\mathrm{sen}(z+w) = \mathrm{sen} z \cos w + \mathrm{sen} w \cos z$

c) Verificar que ambas tienen período 2π.

d) Probar

(i) $|\mathrm{sen} z|^2 = \mathrm{sen}^2(\mathrm{Re} z) + \mathrm{sh}^2(\mathrm{Im} z)$

(ii) $|\cos z|^2 = \cos^2(\mathrm{Re} z) + \mathrm{sh}^2(\mathrm{Im} z)$

e) **(i)** Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\mathrm{sen} z = 0$.

(ii) Idem para $\cos z$.

f) Caracterizar los conjuntos $\{z \in \mathbb{C} / \mathrm{sen} z = 8\}$ y $\{z \in \mathbb{C} / \cos z = i\}$.

17. Funciones hiperbólicas

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad\qquad \mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

a) Verificar

(i) $\mathrm{sen}(iz) = i\mathrm{sh}z \qquad , \qquad \cos(iz) = \mathrm{ch}z$

(ii) $\mathrm{sh}(iz) = i\mathrm{sen}z \qquad , \qquad \mathrm{ch}(iz) = \cos(z)$

(iii) $\mathrm{sh}|\mathrm{Im}z| \leq |\mathrm{sen}z| \leq \mathrm{ch}(\mathrm{Im}z) \qquad , \qquad \mathrm{sh}|\mathrm{Im}z| \leq |\cos z| \leq \mathrm{ch}(\mathrm{Im}z)$
Deducir que $\mathrm{sen}z$, $\cos z$ no son acotadas en $\mathbb{C}$.

(iv) $\mathrm{sen}z = \mathrm{sen}(\mathrm{Re}z)\mathrm{ch}(\mathrm{Im}z) + i\mathrm{sh}(\mathrm{Im}z)\cos(\mathrm{Re}z)$

b) Estudiar la periodicidad de $\mathrm{sh}z$ y $\mathrm{ch}z$.

c) Hallar los ceros de ambas funciones.

d) Hallar el desarrollo en serie de potencias de ambas funciones.

18. Logaritmo

a) Dado $w \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = w$.

b) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y $f, g : A \to \mathbb{C}$ continuas y tales que

$$e^{f(z)} = z \qquad \text{y} \qquad e^{g(z)} = z$$

para todo $z \in A$. Probar que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ para todo $z \in A$.

c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$

(i) Probar que A es abierto y conexo y que para cada $z \in A$ existe un único $\theta_z \in (-\pi, \pi)$ tal que $z = |z|e^{i\theta_z}$.

(ii) Sea $f : A \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \ln|z| + i\theta_z$. Probar que es una rama del logaritmo.

(iii) Ver que f es holomorfa en A y hallar f'.

(iv) ¿Siguen siendo válidos estos resultados si se reemplaza el conjunto A por $B = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0} / r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ donde $0 < \theta_0 \leq 2\pi$?

(v) Escribir todas las ramas del logaritmo en función de la dada en **(ii)**.

d) Sean φ , ψ dos ramas del logaritmo, ¿es cierto que $\varphi(e^z) = \psi(e^z) = z$ para todo z?. Estudiar si se conservan o no para los números complejos las demás propidades del logaritmo real.

e) Calcular: $\ln i$, $\ln 1$, $\ln(1+i)$, $e^{\ln i}$.

19. Sea $\varphi(z)$ el único número del intervalo $[-\pi, \pi)$ tal que: $z = |z|e^{i\varphi(z)}$. Definimos las funciones:

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi(z)}{2}} \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sqrt{|z|}e^{i(\frac{\varphi(z)}{2}+\pi)}$$

a) Probar que $f(z)^2 = g(z)^2 = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

b) ¿Son continuas en $\mathbb{C}$?

c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que f y g son continuas en A.

d) Si se reemplaza el intervalo $[-\pi, \pi)$ por $[0, 2\pi)$, ¿quién debería ser A?

e) ¿Dónde son holomorfas f y g?

f) Mostrar que $\mathrm{Re}(f) \geq 0$.

20. Sea $f : G \to \mathbb{C}$, G abierto conexo, una rama del logaritmo. Definimos la función $g : G \to \mathbb{C}$ por $g(z) = e^{bf(z)}$, $b \in \mathbb{C}$ fijo.

a) Probar que si $b \in \mathbb{Z}$: $g(z) = z^b$.

b) Si G es un abierto conexo donde está definida una rama del logaritmo y $b \in \mathbb{C}$, definimos : $z^b = e^{b \ln z}$. Probar que esta función es holomorfa en G.

c) Calcular i^i considerando la rama principal del logaritmo. Hallar los demás valores considerando las restantes ramas. Idem para : $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^{π}.

d) Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y sean $f, g : G \to \mathbb{C}$ ramas de z^a y z^b, respectivamente. ¿Es cierto que

- $f.g$ es una rama de z^{a+b}?
- f/g es una rama de z^{a-b}?
- si $f(G), g(G) \subset G$, $f \circ g$ y $g \circ f$ son ramas de z^{ab}?

21. Describir los siguientes conjuntos
a) $\{z \in \mathbb{C} / e^z = i\}$ **b)** $\{z \in \mathbb{C} / e^z = -i\}$ **c)** $\{z \in \mathbb{C} / e^z \in \mathbb{R}\}$
d) $\{z \in \mathbb{C} / \cos z = 1\}$ **e)** $\{z \in \mathbb{C} / \cos z = \cos z_0\}$

22. Sea f la rama principal de $\ln(1+z)$ y $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

a) Calcular el radio de convergencia.

b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$ para z dentro del círculo de convergencia de g.

c) Deducir que $f(z) = g(z)$ para $|z| < 1$.