Práctica 9

1. a) **Ecuación de Legendre**
   Hallar mediante desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$, todas las soluciones de:
   $$(1 - z^2)w'' - 2zw' + a(a+1)w = 0$$
   Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite por solución un polinomio P_n tal que $P_n(1) = 1$.
   NOTA: P_n es el $n-$ésimo polinomio de Legendre.

   b) Probar la fórmula de **Olinde Rodrigues**:
   $$P_n(z) = \frac{1}{2^n.n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\right]$$

2. **Ecuación de Hermite**: $w'' - 2zw' + 2aw = 0$

   a) Hallar todas las soluciones.

   b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}_0$, la ecuación admite un polinomio H_n como solución.

   c) Probar que $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \dfrac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z^2}\right]$ es la solución de la ecuación para $a = n$.

3. **Ecuación de Euler**: $a_n x^n y^{(n)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

   a) Mostar que el cambio de variable $x = e^t$ transforma esta ecuación en una lineal a coeficientes constantes. ¿Dónde están definidas las soluciones de la ecuación transformada?

   b) Hallar la solución general de:
   - $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$
   - $x^3y''' + 5x^2y'' + 3xy' = 0$

4. Hallar los puntos singulares de las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de ellos son regulares en el sentido de Fuchs.

   a) $z^2w'' + (z + z^2)w' - w = 0$

   b) $zw'' + 4w = 0$

   c) $z^2 + 3z^2w' - 5w = 0$

   d) $z^2w'' + \text{sen}z\ w + \cos z\ w = 0$

5. Ecuación de Laguerre: $zw'' + (1-z)w' + aw = 0$

a) Verificar que $z = 0$ es un punto singular regular de la ecuación y hallar una solución de la forma: $z^r \sum_{n\geq 1} a_n z^n$.

b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite un polinomio L_n como solución.

c) Verificar que $L_n(z) = e^z \dfrac{d^n}{dz^n}\left[z^n e^{-z}\right]$, el $n-$ésimo polinomio de Laguerre, es solución de la ecuación si $a = n$.

6. Ecuación de Bessel: $z^2 w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\nu \geq 0$.

a) Mostrar que la ecuación tiene una solución de la forma: $z^\nu \sum_{n>0} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$

Comprobar que tomando $a_0 = \dfrac{1}{2\nu\Gamma(\nu+1)}$ se obtiene la solución:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

llamada **función de Bessel de primera especie de orden ν.**

b) Mostar que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la ecuación tiene una solución de la forma: $z^{-\nu} \sum_{n>0} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$. Tomado $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$ se obtiene la solución

$$I_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

c) Deducir que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la solución general de la ecuación es:

$$\omega(z) = A.I_\nu(z) + B.I_{-\nu}(z) \quad , \quad A, B \in \mathbb{C}$$

d) Usando el método de Frobenius y eligiendo $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu\ \Gamma(\nu+1)}$, mostrar que la solución general —para $\nu = 0$— es:

$$\omega(z) = A.I_0(z) + B.\left[\log(z).I_0(z) + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2}\ .\ \%summj = 1k\frac{1}{j}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\right]$$

NOTA: si $\nu \in \mathbb{Z}$, la ecuación es del segundo tipo de Fuchs. Usando Frobenius se calcula una solución linealmente independiente con I_ν:

$$N_\nu(z) = (\text{log}z).I_\nu(z) + z^{-\nu}P_\nu(z) + z^\nu f(z)$$

llamada **función de Neumann o de Bessel de segunda especie de orden** ν. P_ν es un poilinomio tal que $P_\nu(0) \neq 0$ y f es una función entera. Por lo tanto, la solución general en este caso es:

$$\omega(z) = A.I_\nu(z) + B.N_\nu(z) \quad , \quad A, B \in \mathbb{Z}$$

7. Probar que $z\ .\ I_1(z)$ es solución de la ecuación:

$$zw'' - w' + zw = 0$$

8. Resolver transformando Fourier

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0 \qquad u(x,0) = e^{-x^2}$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0 \qquad u(x,0) = e^{-x^2}$

c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = u \qquad x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0 \qquad u(x,0) = 6e^{-3x}.h(x) \qquad h(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$

d) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0 \qquad u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$

9. Integrando convenientemente resolver:

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y \qquad z(x,0) = x^2 \qquad z(1,y) = \text{cos}y$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = xy^2 \qquad z(1,y) = y \qquad z(2,y) = e^y$

10. Hallar los autovalores y las autofunciones de los siguientes problemas:

a) $u'' + \lambda u = 0$, para $0 < x < \pi$ y con las siguientes condiciones de contorno:

(i) $u(0) = u(\pi) = 0$

(ii) $u'(0) = u'(\pi) = 0$

(iii) $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + \lambda u = 0$, $-\pi < x < \pi$, $u(-\pi) = u(\pi)$ y $u'(-\pi) = u'(\pi)$

11. Mostrar que las ecuaciones de Legendre, Bessel, Hermite y Laguerre responden a un problema de Sturm-Liouville si $a = \nu = n$ y $z \in \mathbb{R}$.

12. Usando separación de variables resolver:

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad u(0,y) = 8e^{-3y}$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1 \ , \ t > 0$
$u(0,t) = u(3,t) = 0 \ , \ |u(x,t)| < M \ , \ u(x,0) = 5\text{sen}(4\pi x) - 3\text{sen}(8\pi x) + 2\text{sen}(10\pi x)$

c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0$
$u(x,0) = 8.\cos\left(\dfrac{3\pi x}{4}\right) - 6.\cos\left(\dfrac{9\pi x}{4}\right)$

13. Ecuación de la difusión o del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \ , \ a > 0 \ , \ t \geq 0$$

a) Resolver: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad 0 < x < 3 \qquad t \geq 0$
$u(0,t) = 10 \qquad u(3,t) = 40 \qquad u(x,0) = 25 \qquad |u(x,t)| < M$

b) Mostrar que la ecuación del calor en coordenadas polares para $n = 2$ es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad t \geq 0$$

c) Resolver la ecuación **b)** con las condiciones:
$0 \leq r \leq 3$, $t \geq 0$, $u(3,t) = 0$, $u(r,0) = r$, $|u(r,t)| < M$, u no depende de θ.

14. Ecuación de las cuerdas vibrantes o de las ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad a > 0$$

a) Resolver la ecuación para $n = 1$, $0 < x < 5$
$u(0,t) = u(5,t) = 0 \qquad u(x,0) = x \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$

b) Idem que **a)** con : $x > 0$, $t > 0$, $u(0,t) = 0$, $u(x,0) = x = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)$

c) Mostrar que la ecuación de las ondas, para $n = 2$, en coordenadas polares es:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right]-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

Hallar una solución independiente de φ para $r \leq 4$ tal que $u(4,t) = 0$, $u(r,0) = 2$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}(r,0) = r$

15. Ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

⋆ Para $n = 2$,

a) resolver la ecuación de Laplace con: $0 \leq x, y \leq \pi$, $u(x,0) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, $u(x,\pi) = \text{sen}(3x) + \text{sen}(5x)$

b) mostar que la ecuación en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

y hallar la solución para $r \geq 2$ que verifica $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0$ y $u(2,\theta) = \text{sen}\theta$.

⋆ Para $n = 3$,

c) Mostrar que la ecuación en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right]+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

y suponiendo que u no depende de φ, hallar una solución para:
$z \geq 0$, $0 \leq r \leq 4$, $\lim\limits_{z\to\infty} u(z,r) = 0$, $u(z,4) = 0$, $u(0,r) = r^2$, $|u(z,r)| < M$

d) Mostrar que la ecuación en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\text{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right]=0$$

(i) Hallar u, independiente de φ, tal que sea acotada para: $0 \leq r \leq 2$ y $u(2,\theta) = 5$.

(ii) Hallar u, independiente de φ, acotada para $r \geq 5$ tal que $u(5,\theta) = 2\theta$ y $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0$

16. Resolver transformando Laplace:

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, para $t > 0$, $0 < x < 3$,
$u(x,0) = 10\ e^{-x}$, $u(0,t) = 10$, $u(3,t) = 10\ e^{-3}$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$,
$u(x,0) = 0$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2.\dfrac{\partial u}{\partial t} - 4.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(x,0) = u(1,t) = 0$,
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$