

Práctica 8

1. Sean $f_n, f \in L^2$, $n \geq 1$. Probar:

$$f_n \longrightarrow f \text{ en media cuadrática} \Rightarrow \int_a^b |f_n - f|^2 dx \longrightarrow 0 \text{ para todo } a < b.$$

2. Para cada una de las siguientes funciones, considerar la sucesión:

$$f_N(t) = \int_{-N}^N f(x) e^{-itx} dx$$

y estudiar su convergencia puntual y uniforme.

a) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$	b) $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$	c) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$
d) $f(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$	e) $f(x) = \frac{\text{sen}(Ax)}{x}$ ($A > 0$)	f) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

3. Sean $f, g \in G(\mathbb{R})$. Probar las siguientes propiedades de la convolución:

a) $f * g = g * f$

b) $f * (g * h) = (f * g) * h$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \right)$

4. Sea $f \in G(\mathbb{R})$. Probar:

a) $g(x) = e^{iax} f(x) \Rightarrow g \in L^1$ y $\hat{g}(t) = \hat{f}(t - a)$

b) $g(x) = f(x + a) \Rightarrow g \in L^1$ y $\hat{g}(t) = e^{iat} \hat{f}(t)$

c) $g \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

d) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g} = \overline{\hat{f}}$

e) $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = a \cdot \hat{f}(at)$

f) $g(x) = ix f(x)$ y $g \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ derivable y $\hat{f}' = \hat{g}$

g) $f^{(n)} \in C^n \Rightarrow \widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n \hat{f}(t)$

h) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \text{Re}(\hat{f})$ es par e $\text{Im}(\hat{f})$ es impar.

i) $g(x) = f(ax + b)$, $a \neq 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ibt}{a}} \hat{f}\left(\frac{t}{a}\right)$

j) $g(x) = f(x) \cdot \cos(ax) \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{\hat{f}(t+a) + \hat{f}(t-a)}{2}$

k) $g(x) = f(x) \cdot \text{sen}(ax) \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{\hat{f}(t-a) - \hat{f}(t+a)}{2i}$

l) f continua y $\hat{f} \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$

5. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones de L^1

a) $e^{-|x|}$

b) $\frac{1}{1+x^2}$

c) e^{-ax^2}

d) $\begin{cases} e^{-ax} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$

e) $\begin{cases} 0 & , |x| > A \\ 1 & , |x| < A \end{cases}$

f) $\begin{cases} 1 & , 0 \leq x < a \\ 0 & , x \notin [0, a) \end{cases}$

6. Sea $f \in G(\mathbb{R})$ y $f_N(t) = \int_{-N}^N f(x) \cdot e^{-itx} dx$, $N \in \mathbb{N}$. Probar que: $f_N \rightarrow \hat{f}$ uniformemente en \mathbb{R} .

7. Sean $f, g \in L^2$ y continuas a trozos.

a) Deducir a partir de la desigualdad triangular que $f \pm g, f \pm ig \in L^2$.

b) Usar la igualdad de Parseval para probar que:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm \hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm g|^2 dx$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm i\hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm ig|^2 dx$

c) Probar la ecuación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \overline{\hat{g}(t)} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

8. Calcular usando Parseval:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{-ita}}{it} \right|^2 dt \quad (a > 0)$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(at) \cdot \text{sen}(bt)}{t^2} dt$

9. Sea $f \in L^2$ y tal que $\hat{f}_N \rightarrow g$ uniformemente sobre cada intervalo finito. Probar que $\hat{f} - g$ es una función nula sobre cada intervalo finito (i.e., $\int_a^b |\hat{f} - g|^2 dx = 0$ para todo $a < b$).

Concluir que en tal caso $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} - g|^2 dx = 0$

NOTA: las f_N son las definidas en el ejercicio 6.

10. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^2

- a) $\frac{x}{x^2 + 1}$ b) $\frac{\text{sen}x}{x}$ c) $\frac{x^3}{1 + x^4}$
d) $\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}$ e) $\frac{x}{x^2 + x + 1}$ f) $\frac{\text{sen}(Ax)}{x}$ ($A > 0$)

11. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

- a) $e^{-a(x-b)^2}$ ($a > 0, b \in \mathbb{R}$) b) $e^{-x^2} \text{sen}(ax)$ c) $\frac{1}{x^2 + a^2}$

12. Hallar las transformadas inversas de Fourier de:

- a) $\frac{\text{sen}(au)}{u}$ b) $\frac{1 - \cos(au)}{u}$ c) e^{-u^2} d) $\frac{u}{u^2 + 1}$

13. a) Hallar la transformada inversa de Fourier de: $g(u) = \frac{1}{(u^2 + 1)^2}$ interpretándola como la transformada de una convolución.

b) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \int_{-\infty}^x e^{-(x-y)} g(y) dy$ en función de \hat{g} .

14. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$.

a) Comprobar que $\hat{f}(t) = 2 \frac{\text{sent}t}{t}$.

b) Verificar que:

$$(i) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [c, d] \\ 0 & , x \notin [c, d] \end{cases} = f \left(\frac{2}{d-c}x + \frac{d+c}{d-c} \right)$$

$$(ii) \quad k(x) = \begin{cases} \text{sen}x & , x \in [0, \pi] \\ 0 & , x \notin [0, \pi] \end{cases} = \text{sen}x \cdot f \left(\frac{2}{\pi}x - 1 \right)$$

c) Calcular \hat{h} y \hat{k} usando el ejercicio 4.

15. Función Gama

La función $\Gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

se llama FUNCIÓN GAMA.

a) Probar que:

★ $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0$

★ $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$

b) Dado $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Re}(z) < 0$ se define:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

si $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{Re}(z+n) > 0$. Mostrar que la definición no depende del $n \in \mathbb{N}$ elegido.

c) Probar que $\Gamma(z)$ converge uniformemente en toda faja vertical $0 < \varepsilon \leq \operatorname{Re}(z) \leq M$

Deducir de c) y de b) que Γ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\leq 0}$

16. Hallar la transformada de Laplace de:

a) $\operatorname{sen} x$

b) x^3

c) $(x+b)^2$

17. Para $s > 0$ y $p > -1$, probar que: $\mathcal{L}(t^p)(s) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$

18. Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a) s^{-2}

b) $s^{-\frac{1}{2}}$

c) $(s^2 - a^2)^{-1}$

d) $(s^3 + a^3)^{-1}$

e) $\frac{e^{-as}}{s^2}$

f) $\frac{1}{s^2 + s + 2}$

g) $(s-2)^{-\frac{1}{2}}$

h) $\frac{4-5s}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{s^2 + 2s}$

i) $\frac{2s+3}{s^2 - 4s + 20}$

j) $\frac{e^{-3s}}{s^2 + 6s + 10}$

k) $\log(1 + s^{-1})$

l) $\log\left(\frac{s+6}{s+2}\right)$

19. a) Hallar f tal que:

(i) $f(t) = \int_0^t f(t-u)e^u du + 2t - 3$

(ii) $f(t) = 1 + \int_0^t f(t)\operatorname{sen}(t-u) du$

b) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right)(t)$

c) Probar que $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}} \right) (t) = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$, $s, t > 0$.

20. Resolver, para $x > 0$:

a) $u'' + 2u' + u = e^{-x}$ con: $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + u' + u = \operatorname{sen} x$ con: $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

c) $x.u'' + u' + x.u = 0$ con: $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$

NOTA: en c) hallar la transformada de Laplace de u .

Notaciones y definiciones

★ $G(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es continua a trozos, con derivadas laterales finitas en todo punto y absolutamente integrable en } \mathbb{R}\}$

★ $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt$, $f \in g(\mathbb{R})$

★ $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt$, $f, g \in g(\mathbb{R})$