Transformada de Fourier

M. del C. Calvo

Resultados previos

Vamos a dar tres resultados que nos van a permitir justificar el paso al límite y la derivación bajo el signo integral. El primero de ellos no lo vamos a demostrar porque requiere teoría de la medida. [1]

Definición

Diremos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es ***continua a trozos*** si en cada intervalo finito es continua salvo en una cantidad finita de puntos donde las discontinuidades son saltos.

Notaremos con $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ al conjunto de dichas funciones, con $\mathcal{G}^1(\mathbb{R})$ a los elementos de $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ que además son absolutamente integrables en $\mathbb{R}$; i.e., $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{G}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ y con $\mathcal{G}^2 = \mathcal{G}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Estos dos últimos conjuntos son subespacios vectoriales de L^1 y L^2 respectivamente y por ello también normados con

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx \qquad\qquad \|f\|_2 = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\ dx\Big)^{1/2}$$

Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

Sean $(f_n) \subset L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *absolutamente integrable sobre intervalos finitos tales que*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$

(ii) $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$

Entonces:

a) $f \in L^1(\mathbb{R})$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx.$

[1]cf. Kolmogoroff, A.N.,Fomin, S.V., *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Ed. Mir, Moscú, 1972, pág. 343

Vamos a ver ahora dos aplicaciones muy útiles de este resultado

Paso al límite bajo el signo integral

Sea $F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx$ *con*

(i) $f : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}$ *absolutamente integrable respecto de* x *para todo* $y \in (a,b)$ *(i.e.,* $f(\ ,y) \in L^1(\mathbb{R})$ *para todo* $y \in (a,b)$*)*

(ii) Existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ *tal que* $|f(x,y)| \leqslant |g(x)|$ *para todo* x, y

(iii) Para $y_0 \in (a,b)$ *existe* φ *absolutamente integrable sobre intervalos finitos tal que* $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} \varphi(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Entonces:

a) $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

b) $F(y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ dx \qquad \left(\text{i.e., } \lim_{y\to y_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)\ dx\right)$

Demostración:

⋆ a)

$|f(x,y)| \leqslant |g(x)|$ para todo $y \ \Rightarrow \ |\varphi(x)| \leqslant |g(x)| \ \Rightarrow \ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\ dx$ converge.

⋆ b)

Basta ver que: $y_n \to y_0 \ \Rightarrow \ F(y_n) \to \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ dx$

Siendo $F(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y_n)\ dx$, consideremos la sucesión de funciones definidas por: $f_n(x) = f(x,y_n)$. Estas f_n satisfacen

- $f_n \in L^1$ para todo n
- $f_n(x) = f(x,y_n) \to \varphi(x)$ para todo x pues $y_n \to y_0$
- $|f_n(x)| = |f(x,y_n)| \leqslant |g(x)|$ para todo x, n

Podemos aplicar entonces el Teorema de convergencia dominada para concluir que

$$F(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y_n)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ dx \ \longrightarrow \ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ dx$$

Derivación bajo el signo integral

Sea $H(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\ dx$ *donde* *(i)* $h : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}$ *es absolutamente integrable respecto de* x *para todo* y

(ii) Existe $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ *en* $\mathbb{R} \times (a,b)$ *y es absolutamente integrable sobre todo intervalo finito*

(iii) Existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ *tal que* $\left|\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant |g(x)|$ *para todo* x, y

Entonces

a) H *es derivable*

b) $H'(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\ dx \qquad \Big($*i.e.,* $\displaystyle\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\ dx \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)\ dx\Big).$

Demostración:

Sea $y_0 \in (a,b)$. El cociente incremental de H en y_0 se puede escribir como

$$\frac{H(y) - H(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) - h(x,y_0)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x,y) - h(x,y_0)}{y - y_0}\ dx$$

La idea es aplicar el resultado anterior. Llamemos entonces $f(x,y) = \dfrac{h(x,y) - h(x,y_0)}{y - y_0}$. Con esto, la F de la proposición anterior resulta

$$F(y) = \frac{H(y) - H(y_0)}{y - y_0}$$

i.e., queremos probar que $F(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\ dx$

Veamos que f cumple las hipótesis:

⋆ $f : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}$ es integrable respecto de x para todo y porque h lo es

⋆ $|f(x,y)| \leqslant |g(x)|$ para todo x, y con $g \in L^1$, pues:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \frac{1}{|y - y_0|}|h(x,y) - h(x,y_0)| = \left|\frac{h(x,y) - h(x,y_0)}{y - y_0}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{=} \left|\frac{\partial h}{\partial y}(x, c_{y,x})\right| \\ &\leqslant |g(x)| \end{aligned}$$

donde $c_{y,x}$ es un número entre y_0 e y con lo cual : $(x, c_{y,x}) \in \mathbb{R} \times (a,b)$.

⋆ $f(x,y) = \dfrac{h(x,y) - h(x,y_0)}{y - y_0} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)$ para todo x. Si llamamos $\varphi(x) = \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)$ resulta integrable sobre todo intervalo finito.

El resultado anterior nos garantiza entonces que

a) $\varphi(x) = \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)$ está en $L^1(\mathbb{R})$

b) $\dfrac{H(y)-H(y_0)}{y-y_0} = F(y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)\ dx$. Por lo que podemos asegurar que H es derivable en y_0 y que su derivada es

$$H'(y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)\ dx$$

Integral de Fourier

Vimos cómo las series de Fourier representan a una considerable familia de funciones periódicas. Ahora nos proponemos extender esto para funciones no periódicas reemplazando la serie por una integral.

Tomemos en principio una función f tal que ella y su derivada son continuas a trozos en el intervalo $[-\ell,\ell]$. En tal caso, salvo para un número finito de puntos de ese intervalo, se tiene

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(\frac{k\pi}{\ell}x) + b_k\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{\ell}x)$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(\frac{k\pi}{\ell}t)\ dt \qquad \text{y} \qquad b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{\ell}t)\ dt$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\ dt + \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t).[\cos(\frac{k\pi}{\ell}t)\cos(\frac{k\pi}{\ell}x) + \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{\ell}t)\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{\ell}x)]\ dt\\
&= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\ dt + \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(\frac{k\pi}{\ell}t - \frac{k\pi}{\ell}x)\ dt\\
&= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\ dt + \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(\frac{k\pi}{\ell}(t-x))\ dt\\
&= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\ dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(k\frac{\pi}{\ell}(t-x))\ dt\\
&= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\ dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{\ell}F_\ell(k\frac{\pi}{\ell})\ dt = (\bigstar)
\end{aligned}$$

si $F_\ell(y) = \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(y(t-x))\ dt$

Pensemos en la partición de $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ dada por: $y_0 = 0 < y_1 = \frac{\pi}{\ell} < \cdots < y_k = k\frac{\pi}{\ell} < \dots$.
La longitud de cada intervalito es $\frac{\pi}{\ell}$. Esto sugiere *pensar* al segundo sumando de $(\bigstar)$ como una *suma (infinita) de Riemann* de la función F_ℓ : $\sum_{k=1}^{\infty} F_\ell(y_k)\Delta y_k$. Notemos que la norma de la partición tiende a cero cuando $\ell\to\infty$.

Supongamos ahora que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, la función $f(t)\cos(y(t-x))$ también es de módulo integrable. Tomando límite —formalmente— podríamos decir que

$$F_\ell(y) = \int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos(y(t-x))\ dt \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(y(t-x))\ dt$$

junto con la interpretación anterior —si todo esto fuese válido— tendríamos

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} F_\ell(y_k)\Delta y_k \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(y)\ dy$$

Y más aun, como el primer sumando de **(★)** tiende a cero cuando ℓ tiende a infinito debido a que la integral está acotada por $\|f\|_1$, podríamos escribir

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(y)\ dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(y(t-x))\ dt\ dy \tag{1}$$

Todo esto fue formal pero antes de probar que es realmente válido conviene hacer notar la similitud con la representación en serie de Fourier. Siendo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(y(t-x))\ dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t).[\cos(yt)\cos(yx) + \operatorname{sen}(yt)\operatorname{sen}(yx)]\ dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(yt)\ dt\right)\ .\ \cos(yx)\ +\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(yt)\ dt\right)\ .\ \operatorname{sen}(yx)\end{aligned}$$

si llamamos

$$a_y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(yt)\ dt \qquad \text{y} \qquad b_y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(yt)\ dt$$

obtenemos

$$f(x) = \int_0^{\infty} a_y.\cos(yx)\ +\ b_y.\operatorname{sen}(yx)\ dx$$

Podríamos decir que pasamos de una representación discreta (la serie) a una representación continua (la integral).

Teniendo en cuenta que $\cos(y(t-x))$ es par como función de y, la ecuación (1) se puede escribir en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(y(t-x))\ dt\right)\ dy$$

Por otro lado, como $\operatorname{sen}(y(t-x))$ en impar como función de y, si además supiéramos que $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(y(t-x))\ dt$ es integrable tendríamos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(y(t-x))\ dt\right)\ dy = 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(y(t-x))\ dt\right)\ dy \\ &+i\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(y(t-x))\ dt\right)\ dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iy(t-x)}\ dt\right)\ dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iyt}\ dt\right) e^{-iyx}\ dy \end{aligned}$$

A la función que aparece entre paréntesis en el último miembro de las igualdades anteriores se la llama ***transformada de Fourier de*** f.

Todo lo que hicimos en esta sección fue puramente formal y con el único objetivo de sugerir la definición de transformada de Fourier. Ahora daremos una definición precisa y justificaremos las propiedades que se derivan de ella.

Definición

Dada $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$, se llama ***transformada de Fourier*** de f a la función [2]

$$\mathcal{F}(f)(s) = \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{isy}\ dy$$

Utilizaremos indistintamente ambas notaciones. La primera resulta más conveniente cuando se trata de expresar la transformada de Fourier de una función que está definida a partir de f, por ejemplo $\mathcal{F}(xf(x))$.

Teorema 1

Si $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$, *entonces*

a) $\hat{f}$ *es continua en* $\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \hat{f}(s) = 0$

Demostración:

⋆ a)

En principio notemos que siendo $f(y)e^{isy}$ continua a trozos en $\mathbb{R}$ y $|f(y)e^{isy}| = |f(y)|$ y $f \in L^1(\mathbb{R})$ resulta que $\hat{f}$ está bien definida en todo $\mathbb{R}$.

[2]Hay otras variantes en la manera de definirla, ésta es la que corresponde a la utilizada en la práctica

Para comprobar la continuidad de $\hat{f}$ debemos ver que $\lim_{h\to 0}(\hat{f}(s+h)-f(s))=0$. En principio,

$$\begin{aligned}\hat{f}(s+h)-f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i(s+h)y}\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{isy}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(e^{i(s+h)y}-e^{isy})\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{isy}(e^{ihy}-1)\,dy\end{aligned}$$

Para ver que esto tiende a cero cuando $h\to 0$ sólo debemos verificar que se cumplen las hipótesis que nos permiten pasar al límite bajo el signo integral. En efecto, si llamamos $\phi(y,h)=f(y)e^{isy}(e^{ihy}-1)$, es absolutamente integrable sobre intervalos finitos y además

- ◇ $|\phi(y,h)|=|f(y)||e^{ihy}-1|\leqslant 2|f(y)|=g(y)$ para todo $y\in\mathbb{R}$
- ◇ $g\in L^1(\mathbb{R})$
- ◇ $\phi(y,h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\varphi(y)=0$ para todo $y\in\mathbb{R}$
- ◇ $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$

De modo entonces que podemos asegurar que

$$\lim_{h\to 0}(\hat{f}(s+h)-f(s)) = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0}(f(y)e^{isy}(e^{ihy}-1))\,dy = 0$$

⋆ b)

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{isy}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}(f(y)\cos(sy)+if(y)\operatorname{sen}(sy))\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(f(y)\cos(sy)\,dy + i\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\operatorname{sen}(sy))\,dy\end{aligned}$$

Basta entonces ver que cada una de estas integrales tiende a cero cuando s tiende a ∞. Lo hacemos para la primera, la otra es análoga.

La convergencia de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,dy$ nos permite afirmar que –dado $\varepsilon>0$– existe $M>0$ tal que $\displaystyle\int_{|y|>M}|f(y)|\,dy<\frac{\varepsilon}{2}$. De donde,

$$\left|\int_{|y|>M} f(y)\cos(sy)\,dy\right| \leqslant \int_{|y|>M}|f(y)\cos(sy)|\,dy \leqslant \int_{|y|>M}|f(y)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otro lado, recordando que $\displaystyle\int_{-M}^{M} f(y)\,dy$ es el ínfimo de las sumas superiores correspondientes a las particiones de $[-M,M]$, sabemos que dado este ε existe una partición π de $[-M,M]$ tal que

$$0\leqslant S_\pi(f)-\int_{-M}^{M} f(y)\,dy<\frac{\varepsilon}{4}$$

donde $S_\pi(f) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k(y_{k+1} - y_k)$ y $\mu_k = \sup_{y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}} \{f(y)\}$, $k = 0, \ldots, m-1$.

Si indicamos con $h(y)$ a la función escalera definida en $[-M, M]$ que vale μ_k en el intervalo $[y_k, y_{k+1})$ obtenemos

$$\begin{aligned}
S_\pi(f) - \int_{-M}^{M} f(y)\, dy &= \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k(y_{k+1} - y_k) \; - \; \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(y)\, dy \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} (\mu_k - f(y))\, dy = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} (h(y) - f(y))\, dy \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} |h(y) - f(y)|\, dy = \int_{-M}^{M} |h(y) - f(y)|\, dy
\end{aligned}$$

i.e., $\int_{-M}^{M} |h(y) - f(y)|\, dy < \frac{\varepsilon}{4}$ y por lo tanto

$$\int_{-M}^{M} |(h(y) - f(y)) \cos(sy)|\, dy < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Acotemos ahora la siguiente integral

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-M}^{M} h(y) \cos(sy)\, dy \right| &= \left| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \mu_k \cos(sy)\, dy \right| = \left| \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k \frac{\operatorname{sen}(sy)}{s} \Big|_{y_k}^{y_{k+1}} \right| \\
&= \frac{1}{|s|} \left| \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k (\operatorname{sen}(sy_{k+1}) - \operatorname{sen}(sy_k)) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{|s|} \sum_{k=0}^{m-1} 2|\mu_k| = \frac{K}{|s|}
\end{aligned}$$

Volviendo al límite que queríamos calcular,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos(sy)\, dy \right| &= \left| \int_{|y|>M} f(y) \cos(sy)\, dy \right| + \left| \int_{M}^{M} f(y) \cos(sy)\, dy \right| \\
&\leqslant \int_{|y|>M} |f(y)|\, dy + \left| \int_{-M}^{M} (f(y) - h(y)) \cos(sy)\, dy \right| \\
&\qquad + \left| \int_{-M}^{M} h(y) \cos(sy)\, dy \right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{K}{|s|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } |s|>A}}{<} \varepsilon
\end{aligned}$$

para un cierto $A > 0$.

Luego, queda probado que $\lim_{|s| \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos(sy)\, dy = 0$. De manera similar se prueba que también $\lim_{|s| \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \operatorname{sen}(sy)\, dy = 0$ y por lo tanto concluimos que

$$\hat{f}(s) \xrightarrow[|s| \to +\infty]{} 0$$

Una consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente

Corolario 1

$\hat{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ para toda $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = e^{-|x|}$. Es claro que $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{isx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|x|}\cos(sx)}_{\text{par}}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|x|}\operatorname{sen}(sx)}_{\text{impar}}\,dx \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(sx)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integr. p/partes}}}{=} \frac{2}{s^2+1}\end{aligned}$$

i.e., $\mathcal{F}(e^{-|x|})(s) = \dfrac{2}{s^2+1}$. Notemos que en este caso también $\hat{f} \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$.

2. Dados $a < b$, sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & , \ \text{en otro caso} \end{cases}$$

Utilizando los métodos vistos para calcular integrales mediante residuos se llega a que

$$\hat{f}(s) = 2\frac{\operatorname{sen}(sb)}{s}$$

Notemos que en este caso, $\hat{f}$ no es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $\hat{f} \notin \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$. Vemos entonces que $\mathcal{F}(\mathcal{G}^1(\mathbb{R})) \not\subset \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$.

Propiedades de la transformada de Fourier

1. Sean $f, g \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $af + bg \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$ y $\widehat{af + bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$

La demostración es inmediata a partir de las propiedades de la integral.

2. Sea $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$ y tal que $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, entonces

a) $\hat{f}(-s) = \overline{\hat{f}(s)}$

$$\hat{f}(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i(-s)y}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)e^{isy}}\,dy = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{isy}\,dy} = \overline{\hat{f}(s)}$$

b) si además f es par, $\hat{f}$ es par y real

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{isy}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(sy)\, dy + i\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(y)\,\mathrm{sen}(sy)\, dy}_{\text{impar}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(sy)\, dy \ \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\hat{f}(-s) = \overline{\hat{f}(s)} \underset{\substack{\uparrow \\ \hat{f}(s)\in\mathbb{R}}}{=} \hat{f}(s)$$

i.e., es par.

c) si además f es impar, $\hat{f}$ es impar e imaginaria pura

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(y)\cos(sy)\, dy}_{\text{impar}} + i\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{sen}(sy)\, dy \ \in i\mathbb{R}$$

$$\hat{f}(-s) = \overline{\hat{f}}(s) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{sen}(sy)\, dy = -\hat{f}(s)$$

3. Sean $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $g(x) = f(ax+b)$. Entonces, $g \in \mathcal{G}^1$ y

$$\hat{g}(s) = \tfrac{1}{|a|}e^{-\frac{isb}{a}}\hat{f}(\tfrac{s}{a})$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\hat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)e^{isx}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=ax+b}}{=} \mathrm{sg}(a)\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{is\frac{u-b}{a}}\,\frac{1}{a}\, du \\ &= \frac{e^{-i\frac{s}{a}b}}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\frac{s}{a}u}\, du = \frac{e^{-i\frac{s}{a}b}}{|a|}\,\hat{f}(\tfrac{s}{a})\end{aligned}$$

Hay dos casos especiales: $b = 0$ y $a = 1$

$$\mathcal{F}(f(ax))(s) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(s/a) \qquad\qquad \mathcal{F}(f(x+b))(s) = e^{-isb}\mathcal{F}(f)(s)$$

4. Sea $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}(e^{icx}f(x))(s) = \hat{f}(s+c)$$

En efecto,

$$\mathcal{F}(e^{icx}f(x))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{icx}f(x)e^{isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(s+c)x}\, dx = \hat{f}(s+c)$$

5. Sea $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$. Se tiene

$$\mathcal{F}(f(x)\cos(cx))(s) = \frac{\hat{f}(s+c)+\hat{f}(s-c)}{2} \qquad \mathcal{F}(f(x)\operatorname{sen}(cx))(s) = \frac{\hat{f}(s+c)-\hat{f}(s-c)}{2i}$$

Lo hacemos para la primera igualdad:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x)\cos(cx))(s) &= \mathcal{F}\big(f(x)\frac{e^{icx}+e^{-icx}}{2}\big)(s) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(f(x)e^{icx})(s) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(f(x)e^{-icx})(s)\\ &= \frac{\hat{f}(s+c)+\hat{f}(s-c)}{2}\end{aligned}$$

Lema 1

Si f es continua en $\mathbb{R}$ y tal que $f, f' \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

Demostración:

Lo hacemos para $x \to +\infty$. Como $f' \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$, la integral $\int_0^\infty f'(x)\,dx$ también converge. Esto y la continuidad de f nos permiten afirmar que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-f(0)) + f(0) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(t)\,dt + f(0) \in \mathbb{C}$$

Ahora bien, si fuese $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, f no podría ser integrable en $\mathbb{R}$. Luego, necesariamente debe ser $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Proposición 1

Si f es continua en $\mathbb{R}$ y tal que $f, f' \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\widehat{f'}(s) = -is\hat{f}(s)$$

Demostración:

En principio,

$$\widehat{f'}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{isx}\,dx = \lim_{L,M\to+\infty}\int_{-M}^{L} f'(x)e^{isx}\,dx$$

Integrando por partes esta última integral y teniendo en cuenta la continuidad de f, resulta

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{L} f'(x)e^{isx}\,dx &= f(x)e^{isx}\Big|_{-M}^{L} - \int_{-M}^{L} f(x)ise^{isx}\,dx\\ &= \big(f(L)e^{isL} - f(-M)e^{-isM}\big) - is\int_{-M}^{L} f(x)e^{isx}\,dx\end{aligned}$$

El lema anterior garantiza que lo que está entre paréntesis tiende a cero mientras que la integral del segundo sumando converge a $\hat{f}(s)$. De esta forma queda probada la proposición.

Proposición 2

Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas y $f, f', \ldots, f^{(n)} \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\widehat{f^{(n)}}(s) = (-is)^n \hat{f}(s)$$

Demostración:

Lo hacemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ es la proposición anterior. Para el paso inductivo basta notar que

$$\widehat{f^{(n+1)}}(s) = \widehat{(f^{(n)})'}(s) = (-is)\widehat{f^{(n)}}(s) = (-is)[(-is)^n \hat{f}(s)] = (-is)^{n+1}\hat{f}(s)$$

Observación

En el caso de series de Fourier vimos que cuanto mayor era el orden de diferenciabilidad de f, más rápido era el decrecimiento a cero de sus coeficientes de Fourier.

En este caso pasa algo similar. El teorema 1 nos asegura que $\widehat{f^{(n)}}$ es acotada en $\mathbb{R}$; i.e., existe $K > 0$ tal que

$$|\widehat{f^{(n)}}(s)| \leqslant K$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Pero entonces, aplicando el resultado anterior

$$|\hat{f}(s)| \leqslant \frac{K}{|s|^n}$$

para todo $s \neq 0$. Es decir, cuanto mayor sea n más rápido tenderá $\hat{f}$ a cero en el infinito.

Proposición 3

Sean $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$ y $g(x) = xf(x)$. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces, $\hat{f}$ es de clase C^1 y satisface

$$\hat{f}' = i\mathcal{F}(xf(x))$$

Demostración:

Llamemos $h(x,s) = f(x)e^{isx}$; luego, $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x,s)\, dx$. Basta comprobar que $\hat{f}$ es de clase C^1 en (a,b) para todo $a < b$. La idea es ver que podemos derivar bajo el signo integral. Consideremos entonces $h : \mathbb{R} \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ y veamos que satisface las hipótesis del mencionado teorema:

- $\star$ $h(\ ,s) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $s \in (a,b)$ por serlo f
- $\star$ $\dfrac{\partial h}{\partial s}(x,s) = ixf(x)e^{isx}$; también es absolutamente integrable respecto de x para todo s por serlo g
- $\star$ $\left|\dfrac{\partial h}{\partial s}(x,s)\right| = |xf(x)| = |g(x)|$ para todo x, s con g integrable

Podemos concluir entonces que $\hat{f}$ es derivable y que su derivada es

$$\hat{f}'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial s}(x,s)\ dx = i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{isx}\ dx = i\mathcal{F}(xf(x))(s)$$

Finalmente, la igualdad anterior y la continuidad de la transformada de Fourier aseguran que $\hat{f}$ es de clase C^1.

Por inducción se prueba la siguiente generalización del resultado anterior

Proposición 4

Sean $f \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$, $g(x) = x^n f(x)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces, $\hat{f}$ es de clase C^n y satisface

$$\hat{f}^{(n)} = i^n \mathcal{F}(x^n f(x))$$

Bibliografía

[1] Kolmogoroff, A.N., Fomin, S.V., *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional,*, Ed. Mir, Moscú, 1972.

[2] Pinkus, A., Zafrany, S., *Fourier Series and Integral Transforms,* Cambridge University Press, 1997.