

Práctica 6

1. a) Sea f entera y tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Probar que $f \equiv 0$.
- b) Hallar todas las f enteras tales que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 5$.
2. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$; hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:
- a) $0 < |z| < 1$
- b) $1 < |z| < 2$
- c) $|z| > 2$
- d) $1 < |z-2| < 2$
- e) $0 < |z-2| < 1$
- f) $0 < |z-1| < 1$
3. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ multiplicando los desarrollos de $\frac{1}{z-1}$ y de $\frac{1}{z-2}$.
4. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones en las regiones indicadas
- a) $\frac{2}{z^3 - 3z^2 + 2z}$ en $1 < |z| < 2$
- b) $\frac{1}{z(z-1)^2}$ en $0 < |z-1| < 1$ y en $|z-1| > 1$
- c) $\frac{z}{(z-1)^3}$ en $\mathbb{C} - \{1\}$, en $|z| < 1$ y en $|z| > 1$
- d) $\frac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)^2}$ en:
- (1) $|z| < 2$ (2) $0 < |z+3| < 1$ (3) $|z| > 3$ (4) $0 < |z+2| < 1$ (5) $2 < |z| < 3$

5. Si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, probar que el desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $1 < |z| < 2$ tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos no nulos.
6. Probar que todo disco perforado $0 < |z| < \varepsilon$ la función $e^{\frac{1}{z}}$ toma todos los valores complejos salvo el cero.
7. Sea $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, $z \neq 0$. Mostrar que f tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y explicar por qué este hecho muestra que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(0) = 0$ y $F(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, si bien es indefinidamente derivable en \mathbb{R} , no coincide con su serie de Taylor en ningún entorno de cero.
8. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Determinar su naturaleza. Si es evitable, definir $f(0)$ de modo que resulte holomorfa en $z = 0$. Si es un polo, hallar la parte singular

a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$	b) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$	c) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$
d) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$	e) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z}$	f) $f(z) = \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$
g) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z-1)}$	h) $f(z) = \frac{1}{1 - e^z}$	i) $f(z) = z \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

9. Determinar la descomposición en fracciones simples de $\frac{z^2 + 1}{(z^2 + z + 1)(z - 1)^2}$.

10. Hallar y clasificar las singularidades de

a) $\frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z+1)^3}$	b) $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$	c) $\frac{\operatorname{tg} z}{z^n}$
d) $\frac{1 - \cos z}{z^n} - \frac{1}{z}$	e) $-\frac{1}{\operatorname{sen}(z^2 + 1)^{-1}}$	f) $\frac{\cos z}{e^{\frac{1}{z-1}}}$
g) $\frac{1}{\cos(z+1)}$		

11. Probar que un punto singular aislado a de f es un polo si y sólo si $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$.

12. a) Mostrar que $f(z) = \operatorname{tg} z$ es meromorfa en \mathbb{C} .
- b) Hallar sus polos y el orden de los mismos.
- c) Determinar la parte singular de f en cada polo.

13. Sea $f(z) = \frac{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}$. Probar
- ∞ es a lo sumo una singularidad aislada.
 - si $m < n$, ∞ es una singularidad evitable.
 - si $m = n$, f es holomorfa en ∞ .
 - si $m > n$, ∞ es un polo. Hallar su orden.
14. a) Probar que una función entera tiene una singularidad evitable en ∞ si y sólo si es constante.
- b) Probar que una función entera tiene un polo de orden m en ∞ si y sólo si es un polinomio de grado m .
- c) Caracterizar a las funciones racionales que tienen una singularidad evitable en ∞ .
- d) Caracterizar a las funciones racionales que tienen un polo de orden m en ∞ .
15. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en \mathbb{C}_∞
- | | |
|---|--|
| a) $\frac{e^z - 1 - z}{z^2}$ | b) $\cos z \cdot e^{-\frac{1}{z^2}}$ |
| c) $\frac{1}{z^3 - 7z^2 + z + 5} + ze^{\frac{1}{z}}$ | d) $\frac{z^5}{1 + z^4}$ |
| e) $\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)^{-1}$ | f) $e^{\frac{z}{1-z}}$ |
| g) $\frac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1}$ | h) $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}$ |
| i) $\frac{1}{\cos z - 1}$ | j) $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{z+3}\right)}{\left(z + 2 - \frac{i}{4\pi}\right)(1 - e^{1/(z+2)})}$ |
16. a) Hallar una función f tal que $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$ y f no holomorfa en 0.
- b) Mostrar que una función puede ser holomorfa en ∞ y tener residuo no nulo allí.
- c) Probar que si f tiene una singularidad esencial en $z = a$, $\frac{1}{f}$ tiene una singularidad esencial, o no aislada, en $z = a$.
- d) Mostrar que si ∞ es un cero de f de orden mayor que 1, entonces $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$.
- e) Mostrar que si ∞ es un cero simple de f , entonces: $\operatorname{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$.

17. Probar:

a) Sea a un polo de orden m de f y sea $g(z) = (z - a)^m f(z)$, entonces: $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$

b) Si a es un polo simple de f , entonces: $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$

18. Sea f una función meromorfa en un abierto conexo G . Probar:

a) Si f tiene un polo de orden m en $a \in G$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\text{Res}(f'/f, a) = -m$.

b) Si f tiene un cero de orden m en $b \in G$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\text{Res}(f'/f, b) = m$.

c) Si f tiene un polo simple en a y g es holomorfa en a entonces $\text{Res}(fg, a) = \text{Res}(f, a) \cdot g(a)$.

19. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas

a) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$

b) $f(z) = \frac{1}{z^3} \text{sen} z$

c) $f(z) = z^5 \cos z$

d) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$

e) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

f) $f(z) = \frac{\cos z}{\text{sen} z}$

g) $f(z) = e^{2z}(z-1)^2$

h) $f(z) = \frac{\cos z}{z+1}$

i) $f(z) = \frac{\text{sen} z}{z}$

j) $f(z) = \frac{1+z^2}{z(z-1)^2}$

k) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$

l) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z+1)^7(z^2+2)(z-1)}$

m) $f(z) = \cos\left(\frac{\pi}{z-\pi}\right)$

n) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$

20. Calcular los siguientes residuos

a) $z^2(z-1)^{-1}$ en $z=0$

b) $ze^z(z^2-1)^{-1}$ en $z=1$

c) $e^z(z-1)^{-2}z^{-1}$ en $z=0, 1$

d) $\frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ en $z = \infty$

e) $e^{az}(1+e^z)^{-1}$ en $z = \pi i$

f) $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)z}$ en $z = 0, -1, \infty$

21. Sea C la circunferencia $|z| = 2$, recorrida una vez en sentido positivo. Calcular:

a) $\int_C \frac{z}{z^4 + 1} dz$

b) $\int_C \frac{1 + \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z} dz$

c) $\int_C \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$

22. Sea $G = \mathbb{C} - [-1, 1]$. Se define en G la función $f(z) = z^2 \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$.

a) Calcular $\operatorname{Res}(f, \infty)$.

b) Utilizando el método de los residuos, calcular:

$$\int_C f(z) dz \quad \text{y} \quad \int_C \frac{z^3}{z^2 + 1} dz$$

siendo $C : |z| = 2$

23. Clasificar las singularidades y hallar todos los residuos en \mathbb{C}_∞ de:

a) $\frac{e^{z^2 + \frac{1}{z^2}} - 1}{z^2 - 1}$

b) $\frac{\cos z - 1}{z^6 + z^4}$

c) $\frac{\cos z - 1}{(z - 2\pi)^2} + \frac{z - 3}{(z + 1)^2(z - 2)}$

24. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}_\infty - \{-1, 2\}$ tal que -1 es un polo simple y 2 un polo doble. Se sabe además que:

- $\operatorname{Res}(f, -1) = 1$ y $\operatorname{Res}(f, 2) = 2$

- $f(0) = \frac{7}{4}$ y $f(1) = \frac{5}{2}$

Determinar f y calcular su desarrollo en serie de Laurent en potencias de z en la corona $1 < |z| < 2$ y el residuo de f en ∞ .

25. Calcular:

a) $\int_{\gamma} \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{3z^5 - 2z^4 + 5} dz$ $\gamma : |z| = 3$ en sentido positivo

b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{\operatorname{sen} z^2}$ $\gamma : |z| = \frac{\pi}{2}$ en sentido negativo

26. Sea a una singularidad aislada de f y $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Probar que

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

27. Calcular, sin efectuar el desarrollo, el radio de convergencia de las series de Taylor de las siguientes funciones

a) $\frac{1}{\operatorname{sen}(1 + iz)}$ en $z = 0$

b) $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$ en $z = \frac{3}{2} - i$