Transformada de Laplace

M. del C. Calvo

Dada $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, definimos la ***transformada de Laplace*** de f como

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt$$

para los $s \in \mathbb{R}$ para los cuales converge esta integral.

Según veremos esta integral converge para un considerable número de funciones y la función $\mathcal{L}(f)(s)$ está definida sobre semirrectas de la forma $(a, +\infty)$. La linealidad de la integral implica la de $\mathcal{L}$.

Ejemplos

1. $f(t) = 1\ ,\ t \geqslant 0$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^A = \frac{1}{s}$$

para $s > 0$ y diverge si $s \leqslant 0$.

2. $f(t) = e^{at}\ ,\ t \geqslant 0\ ,\ a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\ dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\ dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\Big|_0^A = \frac{1}{s-a}$$

para $s > a$ y diverge si $s \leqslant a$.

3. $f(t) = e^{zt}\ ,\ t \geqslant 0\ ,\ z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{zt}\ dt = \int_0^\infty e^{-(s-z)t}\ dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-(s-x)t}e^{iyt}}{-(s-z)}\Big|_0^A = \frac{1}{s-z}$$

para $s > x$ y diverge si $s \leqslant x$.

4. $f(t) = \operatorname{sen}(at)$, $t \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \mathcal{L}\Big(\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\Big)(s) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}(e^{iat})(s) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}(e^{-iat})(s) \\ &= \frac{1}{2i}\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{2i}\frac{1}{s + ia} = \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

para $s > \operatorname{Re}(ia), \operatorname{Im}(-ia) = 0$.

5. $f(t) = \cos(at)$, $t \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \mathcal{L}\Big(\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\Big)(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{iat})(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-iat})(s) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s - ia} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + ia} = \frac{s}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

para $s > \operatorname{Re}(ia), \operatorname{Im}(-ia) = 0$

Funciones de orden exponencial

Vamos a ver ahora que hay una familia de funciones para las cuales su transformada de Laplace está definida sobre una semirrecta.

Proposición 1

Sea $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$. Si existen constantes $K > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$|f(t)| \leqslant Ke^{at} \tag{1}$$

para todo $t \geqslant 0$ entonces, $\mathcal{L}(f)(s)$ está definida para todo $s > a$.

Demostración:

Basta ver que el integrando está mayorado por una función absolutamente integrable. Por hipótesis es

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-st}|f(t)| \leqslant e^{-st}Ke^{at} = Ke^{-(s-a)t}$$

para todo $t \geqslant 0$. Y ya vimos que esta función es integrable para $s > a$.

Definición

Decimos que una función $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{C}$ es de ***orden exponencial*** en $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ si satisface (1) para todo $t \geqslant 0$.

El siguiente resultado proporciona una manera simple de comprobar si una función es o no de orden exponencial

Proposición 2

Sea $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, *entonces* f *es de orden exponencial en* $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ *si y sólo si existe* $\beta > 0$ *tal que* $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{e^{\beta t}} = 0$.

Demostración:

$\Rightarrow$

Sean $K > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ para todo $t \geqslant 0$. Entonces,

$$\left|\frac{f(t)}{e^{\beta t}}\right| \leqslant Ke^{-(\beta-a)t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

con sólo tomar $\beta > a, 0$.

$\Leftarrow$

Sea $\beta > 0$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{e^{\beta t}} = 0$. Entonces, existe $b > 0$ tal que $|f(t)| < e^{\beta t}$ para todo $t \geqslant b$. Pero como f está acotada en $[0, b]$ existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leqslant M \leqslant e^{\beta t}$ para todo $0 \leqslant t \leqslant 0$ por ser $\beta t \geqslant 0$. Basta entonces tomar $K = \max\{M, 1\}$ con lo cual se tiene $|f(t)| \leqslant Ke^{\beta t}$ para todo $t \geqslant 0$.

Observaciones

1. A partir de esta proposición es fácil verificar que las funciones

$$1 \quad , \quad \sqrt{t} \quad , \quad t^n \quad , \quad e^{at} \quad , \quad \operatorname{sen}(at) \quad , \quad \cos(at)$$

son de orden exponencial. Y también que $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ y e^{t^2} no lo son.

2. $\mathcal{L}(f)(s)$ puede estar definida en todo $s \in \mathbb{R}$. Es por ejemplo el caso de e^{-t^2},

$$\mathcal{L}(e^{-t^2})(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-t^2}\ dt = \int_0^\infty e^{-(t^2+st)}\ dt = e^{s^2/4}\int_0^\infty e^{(t+s/2)^2}\ dt$$

   que converge para todo $s \in \mathbb{R}$.

3. Hay funciones que no son de orden exponencial pero para las cuales existe su transformada de Laplace. Consideremos la función $f(t) = t^{-1/2}$. Como $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt$ converge, también lo hace $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\ dt$. Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\ dt$ converge y además vale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\ dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ A\to\infty}} \frac{2}{\sqrt{s}}\int_{\sqrt{s\varepsilon}}^{\sqrt{A\varepsilon}} e^{-v^2}\ dv = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-v^2}\ dv = \frac{2}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

   Luego, $\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{t}})(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ para $s > 0$.

Proposición 3

Si $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ es de orden exponencial entonces,

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$$

Demostración:

Sabemos que existen $K > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ para todo $t \geqslant 0$. Luego, si $s > a$

$$|\mathcal{L}(f)(s)| \leqslant \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\ dt \leqslant K\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\ dt = \frac{K}{s-a} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

Derivación e integración

Nos ocuparemos ahora de ver cómo se relaciona la transformada de Laplace con la derivación e integración

Proposición 4

Sea f continua en $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, de orden exponencial y tal que $f' \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$. Entonces, existe la transformada de Laplace de f' y vale

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

para todo $s > a$. [1]

Demostración:

Veamos primero que está definida. Fijado s, $e^{-st}f'(t)$ es continua a trozos en $[0, L]$ para todo $L > 0$. Sean $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = L$ las discontinuidades de f' en este intervalo. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^L e^{-st} f'(t)\, dt &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-st} f'(t)\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua}}}{=} \sum_{i=1}^{n} e^{-st} f(t)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} -se^{-st} f(t)\, dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} (e^{-sx_i} f(x_i) - e^{-sx_{i-1}} f(x_{i-1})) + s \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-st} f(t)\, dt \\
&= (e^{-sL} f(L) - e^0 f(0)) + s \int_0^L e^{-st} f(t)\, dt
\end{aligned}$$

Como consecuencia de ser f de orden exponencial resulta que el primer sumando tiende a $-f(0)$ cuando $L \to \infty$ para todo $s > a$ mientras que el segundo lo hace a $s\mathcal{L}(f)(s)$. Esto prueba tanto la convergencia de $\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$ como la igualdad

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

para $s > a$.

Teorema 1

Sean $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ continuas en $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ y tales que existen constantes $K > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$|f^{(j)}(t)| \leqslant Ke^{at} \tag{2}$$

para todo $j = 0, \ldots, n-1$ y todo $t \geqslant 0$. Si además $f^{(n)} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, entonces

(a) $\mathcal{L}(f^{(n)})$ está definida para $s > a$ y vale

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

[1] $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ para todo $t \geqslant 0$.

(b) $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}(f))(s)$ *para* $s > a$.

Demostración:

Lo hacemos por inducción sobre n.

$\star$ *(a)*

Para $n = 1$ fue probado en la proposición anterior. Supongamos ahora que vale n y veamos también es cierto para $n+1$. Como $f^{(n)}$ satisface las condiciones de la proposición anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f^{(n+1)})(s) &= \mathcal{L}((f^{(n)})')(s) = s\mathcal{L}(f^{(n)})(s) - f^{(n)}(0) \\
&= s(s^n\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)) - f^{(n)}(0) \\
&= s^{n+1}\mathcal{L}(f)(s) - s^n f(0) - \cdots - sf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)
\end{aligned}$$

$\star$ *(b)*

Comprobemos primero que $t^n f(t)$ es de orden exponencial. Para f sabemos que es cierto, luego existe $\beta > 0$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{e^{\beta t}} = 0$. Pero entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n f(t)}{e^{(\beta+1)t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\beta t}} = 0$$

i.e., $t^n f(t)$ también es de orden exponencial. Notemos además que la condición (2) implica que $|e^{-st}f^{(j)}(t)| \leqslant Ke^{-(s-a)t}$ para todo $t \geqslant 0$ y todo $s > a$. Es decir, $e^{-st}f^{(j)}$ satisface las hipótesis del teorema que permite derivar bajo el signo integral.

Para $n = 1$ debemos ver que $-\mathcal{L}(f)'(s) = \mathcal{L}(tf(t))(s)$. En efecto,

$$-\mathcal{L}(f)'(s) = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt = \int_0^\infty te^{-st}f(t)\ dt = \mathcal{L}(tf(t))(s)$$

Supongamos ahora que el resultado es válido para n y veamos que también vale para $n+1$,

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\mathcal{L}(f)(s) &= -\frac{d}{ds}\left((-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f)\right)(s) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(t^n f(t)))(s) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{=} \mathcal{L}(t.t^n f(t))(s) = \mathcal{L}(t^{n+1}f(t))(s)
\end{aligned}$$

Proposición 5

Si $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ *es de orden exponencial* [2], *entonces*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\ dt\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s)$$

[2] $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ para todo $t \geqslant 0$

para $s > a + 1$.

Demostración:

En principio notemos que como f es de orden exponencial, también lo es la función $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$, la que además es continua en $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Por lo tanto podemos aplicar la proposición 4 y así obtener que para $s > a$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(F')(s) = s\mathcal{L}(F)(s) - F(0) = \mathcal{L}(F)(s)$$

Traslaciones y homotecias

Proposición 6

Si $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ *es de orden exponencial* [3], *entonces*

(a) $\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s - \alpha)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $s > a + \alpha$

(b) $\mathcal{L}(f(\alpha t))(s) = \dfrac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)(s/\alpha)$ *para todo* $\alpha > 0$ *y* $s > \alpha a$.

Demostración:

⋆ *(a)*

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} f(t)\ dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} f(t)\ dt = \mathcal{L}(f)(s-\alpha)$$

si $s - \alpha > a$.

⋆ *(b)*

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(\alpha t)\ dt \underset{\substack{\uparrow \\ u=\alpha t, \alpha>0}}{=} \int_0^\infty e^{-su/\alpha} f(u)\ \frac{1}{\alpha}\ du = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)(s/\alpha)$$

si $s/\alpha > a$.

[3] $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ para todo $t \geqslant 0$

Ejemplos

1. $\mathcal{L}(t^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$

2. $\mathcal{L}(e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t))(s) = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $s > \alpha$.

3. $\mathcal{L}(e^{\alpha t}\cos(\beta t))(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $s > \alpha$.

La función de Heaviside

Para cada $c \geqslant 0$ definimos

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant c \\ 1 & \text{si } c \leqslant t \end{cases}$$

y la llamamos ***función de Heaviside***. Su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}(u_c)(s) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\ dt = \int_c^\infty e^{-st}\ dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_c^A = \frac{e^{-cs}}{s}$$

para todo $s > 0$.

Sean $0 < c < d$ y consideremos la función

$$f_{cd}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \leqslant t < d \\ 0 & \text{si } t \notin [c, d) \end{cases}$$

Es inmediato verificar que $f_{cd} = u_c - u_d$ y por lo tanto

$$\mathcal{L}(f_{cd})(s) = \mathcal{L}(u_c)(s) - \mathcal{L}(u_d)(s) = \frac{e^{-cs} - e^{-ds}}{s}$$

para todo $s > 0$.

Consideremos ahora la función parte entera: $f(t) = [t]$ para $t \geqslant 0$. Es fácil comprobar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} u_n \longrightarrow f$ uniformemente en $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ lo que permite pasar al límite bajo la integral y de esa forma calcular

$$\mathcal{L}([t])(s) = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{L}(u_n)(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-sn}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^\infty (e^{-s})^n = \frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}} = \frac{1}{s(e^s-1)}$$

para todo $s > 0$.

El siguiente resultado es útil cuando se trata de transformar una función partida.

Teorema 2

Sea f una función para la cual existe $\mathcal{L}(f)(s)$ para $s > a$ y sea $c > 0$. Entonces,

$$\mathcal{L}(u_c(t)f(t-c))(s) = e^{-cs}\mathcal{L}(f)(s)$$

para $s > a$.

Demostración:

$$\mathcal{L}(u_c(t)f(t-c))(s) = \int_c^\infty f(t-c)e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+c)}\, du = e^{-cs}\mathcal{L}(f)(s)$$

Ejemplos

1. Sea $f(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leqslant t < 2 \\ t^2 & , \ t \geqslant 2 \end{cases}$. Calculemos su transformada de Laplace.

   Buscamos una función g tal que $f(t) = u_2(t)g(t-2)$ para $t \geqslant 0$. En particular, para $t \geqslant 2$ debe ser $t^2 = f(t) = g(t-2)$; i.e., $g(t-2) = t^2$ para $t \geqslant 2$ lo implica que la función $g(t) = (t+2)^2$ definida para $t \geqslant 0$ es la que buscamos.

   Por lo tanto,

   $$\mathcal{L}(f)(s) = e^{-2s}\mathcal{L}(g)(s) = e^{-2s}\mathcal{L}(t^2+4t+4)(s) = e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right)$$

   para $s > 0$.

2. Sea $f(t) = \begin{cases} 5 & , \ 0 \leqslant t < 1 \\ t+4 & , \ 1 \leqslant t < 2 \\ 4t-2 & , \ 2 \leqslant t \end{cases}$.

   Ahora vamos a buscar tres funciones g_0, g_1, g_2 tales que $f(t) = g_0(t) + u_1(t)g_1(t) + u_2(t)g_2(t)$. Si consideramos en principio el intervalo $[0, 1)$, esta condición dice que debe ser $5 = f(t) = g_0(t)$. Entonces, ahora en el intervalo $[1, 2)$, se debe cumplir

$t + 4 = f(t) = 5 + g_1(t-1)$. Entonces, $g_1(t) = t - 1$. Finalmente, para $t \geqslant 2$ tenemos la relación $4t - 2 = f(t) = 5 + (t-1) + g_2(t-2)$. De aquíse deduce que $g_2(t) = 3t$ para $t \geqslant 0$.

Ya podemos calcular la transformada de f usando esta descomposición y el resultado anterior

$$\mathcal{L}(f)(t) = \mathcal{L}(g_0)(s) + e^{-s}\mathcal{L}(g_1)(s) + e^{-2s}\mathcal{L}(g_2)(s) = \frac{5}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{3e^{-2s}}{s^2}$$

para $t \geqslant 0$.

Inyectividad de $\mathcal{L}$

El siguiente teorema [4] nos permite *antitransformar* una gran familia de funciones lo que resulta necesario en la aplicación de la transformada de Laplace para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Teorema de Lerch

Sean $f, g \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ de orden exponencial tales que sus respectivas transformadas de Laplace están definidas y coinciden en $\mathbb{R}_{>a}$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t > 0$ donde ambas son continuas.

Producto de convolución

Dadas $f, g \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ de orden exponencial —extendiéndolas como la función nula en $\mathbb{R}_{<0}$— se puede pensar que son continuas a trozos y de orden exponencial en $\mathbb{R}$, con lo cual repitiendo lo hecho para el caso de Fourier podríamos definir

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)\ dy$$

Pero como g es nula en los reales negativos resulta que

$$f * g(t) = \int_{0}^{\infty} f(t-y)g(y)\ dy$$

[4]se puede ver su demostración en: Kreider, D.L., Kuller, R.G., Ostberg, D.R., Perkins, F.W., *Introducción al análisis lineal*, Fondo Educativo Latinoamericano, 1971.

y como lo mismo ocurre con f se tiene $f(t-y)=0$ para todo $y>t$ y en consecuencia

$$f*g(t)=\begin{cases}\int_0^t f(t-y)g(y)\ dy & ,\ t\geqslant 0\\ 0 & ,\ t<0\end{cases}$$

Todo esto sugiere la siguiente

Definición

Dadas $f,g\in\mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ de tipo exponencial se llama ***producto de convolución*** de f con g a la función

$$f*g(t)=\int_0^t f(t-y)g(y)\ dy$$

definida para $t\geqslant 0$.

Observación

Es inmediato comprobar que esta operación es conmutativa y también lineal respecto de cada variable.

Teorema 3

Sean $f,g\in\mathcal{G}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ de tipo exponencial. Si $|f(t)|\leqslant K_1e^{at}$ y $|g(t)|\leqslant K_2e^{at}$ para todo $t\geqslant 0$ y ciertas constantes $K_1,K_2>0$ y $a\in\mathbb{R}$, entonces

(a) $|f*g(t)|\leqslant K_1K_2te^{at}$ *para* $t\geqslant 0$

(b) $\mathcal{L}(f*g)(s)=\mathcal{L}(f)(s).\mathcal{L}(g)(s)$ *para* $s>a$

Demostración:

$\star$ *(a)*

$$|f*g(t)|\leqslant\int_0^t|f(t-y)||g(y)|\ dy\leqslant K_1K_2\int_0^t e^{a(t-y)}e^{ay}\ dy=K_1K_2e^{at}\int_0^t dy=K_1K_2te^{at}$$

$\star$ *(b)*

En principio notemos que lo probado en *(a)* garantiza que está definida la transformada de Laplace de $f * g$. La calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f*g)(s) &= \int_0^\infty f*g(t)e^{-st}\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ f(t-y)=0,y>t}}{=} \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy\,dt\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-y)g(y)e^{-st}\,dy\,dt\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-y)e^{-s(t-y)}g(y)e^{-sy}\,dy\,dt\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t-y)e^{-s(t-y)}\,dt\right) g(y)e^{-sy}\,dy\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ f(t-y)=0,y>t}}{=} \int_0^\infty \left(\int_y^\infty f(t-y)e^{-s(t-y)}\,dt\right) g(y)e^{-sy}\,dy\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ u=t-y}}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du\right) g(y)e^{-sy}\,dy =\\
&= \mathcal{L}(f)(s).\mathcal{L}(g)(s)
\end{aligned}$$

La función Gama

Comencemos por calcular la transformada de Laplace de $f_p(t) = t^p$ definida para $t \geqslant 0$ y donde $p > -1$. Es fácil comprobar que la transformada está definida para $s > 0$ y resulta

$$\mathcal{L}(f_p)(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^p\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ u=st}}{=} \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^p du = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^p\,du$$

La integral del último miembro es sólo función de p. Se la llama ***función gama***, aunque su definición habitual es

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}\,du$$

para $p > 0$. De esta forma,

$$\mathcal{L}(t^p)(s) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

para $s > 0$ y $p > -1$.

Si recordamos que $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ para $n \in \mathbb{N}$, obtenemos la relación

$$\Gamma(n+1) = n!$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Propiedades

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ para todo $p > 0$.

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-u} u^p \, du = -e^{-u} u^p \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-u}) p u^{p-1} \, du = p\Gamma(p)$$

2. $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u} \, du = -e^{-u} \Big|_0^\infty = 1$$

3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma(1/2) = \Gamma(-1/2+1) = s^{-1/2+1} \mathfrak{L}(t^{-1/2})(s) = s^{-1/2+1} \sqrt{\frac{\pi}{s}} = \sqrt{\pi}$$

4. $\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\ldots(p-1)p\Gamma(p)$

   Por inducción sobre n. El caso $n = 1$ fue hecho en 1.

5. $\Gamma\left(\dfrac{2n+1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2^n} \sqrt{\pi}$

   Es una consecuencia inmediata de la propiedad anterior con $p = 1/2$.

6. $\mathfrak{L}(t^{n-1/2})(s) = \dfrac{(2n-1)!! \, \sqrt{\pi}}{2^n} \dfrac{1}{s^{n+1/2}}$

$$\mathfrak{L}(t^{n-1/2})(s) = \frac{\Gamma(n-1/2+1)}{s^{n+1/2}} = \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2})}{s^{n+1/2}} = \frac{(2n-1)!! \, \sqrt{\pi}}{2^n} \frac{1}{s^{n+1/2}}$$

Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales

Vamos a resolver primero un problema homogéneo y luego uno no homogéneo.

1. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 & , \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   Sabemos que este problema tiene solución única. Para encontrarla transformamos ambos miembros de la ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{L}(y'' + 2y' + 5y)(s) = (s^2 \mathfrak{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0)) + 2(s\mathfrak{L}(y)(s) - y(0)) + 5\mathfrak{L}(y)(s) \\ &= (s^2 + 2s + 5)\mathfrak{L}(y)(s) - s - 2 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y)(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4} \\ &= \mathcal{L}(e^{-t}\cos(2t))(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t}\operatorname{sen}(2t))(s) \\ &= \mathcal{L}(e^{-t}\cos(2t) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t}\operatorname{sen}(2t))(s)\end{aligned}$$

Entonces, el teorema de Lerch nos dice que

$$y(t) = e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$$

es la solución del problema.

2. Consideremos ahora un problema no homogéneo

$$\begin{cases} y'' + y' = h(t) & , \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

donde $h(t) = 1$ en $[\pi, 2\pi)$ y $h(t) = 0$ fuera de ese intervalo.

Notemos en principio que $h = u_\pi - u_{2\pi}$. Aplicando el mismo procedimiento anterior, ahora tenemos

$$(s^2+s)\mathcal{L}(y)(s) - sy'(0) - 2y(0) = \mathcal{L}(u_\pi - u_{2\pi})(s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}$$

Y teniendo en cuenta las condiciones iniciales resulta

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s(s^2+s)} = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}$$

Pero $\dfrac{1}{s^2(s+1)} = \mathcal{L}(e^{-t} + t - 1)(s)$. Entonces, si llamamos $g(t) = e^{-t} + t - 1$, resulta que

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(u_\pi(t)g(t-\pi))(s) - \mathcal{L}(u_{2\pi}(t)g(t-2\pi))(s)$$

Es decir,

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}\big(u_\pi(t)g(t-\pi) - u_{2\pi}(t)g(t-2\pi)\big)(s)$$

De donde finalmente se obtiene la solución del problema

$$y(t) = u_\pi(t)(e^{-(t-\pi)} - 1 + (t-\pi)) - u_{2\pi}(t)(e^{-(t-2\pi)} - 1 + (t-2\pi))$$

Bibliografía

[1] Pinkus, A., Zafrany, S., *Fourier Series and Integral Transforms,* Cambridge University Press, 1997.