Práctica 2

1. **a)** Sea $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, probar que

$$z_n \to z \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z) \ \text{ e } \ \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$$

b) Probar que la sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ es de Cauchy si y sólo si lo son las sucesiones reales $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\geq 1}$ e $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\geq 1}$.
Deducir que $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ es un espacio métrico completo.

2. Probar

a) $z_n \to z \ , \ w_n \to w \qquad \Rightarrow \qquad z_n \pm w_n \to z \pm w \ \text{ y } \ z_n w_n \to zw.$

b) $z_n \to z \ , \ w_n \to w \ , \ w \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w}.$

c) $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|$. ¿Bajo qué condiciones vale la recíproca?

3. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) $n\ i^n$ **b)** $n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ **c)** $\left(\dfrac{(-1)^n+i}{2}\right)^n$

d) $\cos(n\pi) + i\ \dfrac{\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ **e)** $(1+2i)^{-n}$ **f)** z^{-n}

g) $\dfrac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$ **h)** $-1 + \dfrac{(-1)^n i}{n}$ **i)** $\dfrac{n+1}{n} + i\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

j) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ **k)** $\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$

4. Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Probar

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge (absolutamente) si y sólo si las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ convergen (absolutamente).

b) si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

5. a) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$?. Demostrarlo.

b) Idem para $|\alpha| > 1$. ¿Qué se puede decir en el caso $|\alpha| = 1$?

c) Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

- converge si $|z| < 1$
- diverge si $|z| > 1$.

Hallar su suma para $|z| < 1$.

6. Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas cuyo término general es:

a) $\dfrac{2i}{3^n}$ **b)** $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$ **c)** $\dfrac{n+1}{2n+1}$

d) $\dfrac{2^n}{5^n - n}$ **e)** $\dfrac{1}{n!}$ **f)** $\dfrac{n}{n^n}$

g) $\dfrac{n}{n^2 - n}$ **h)** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **i)** $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

j) $(-1)^n \dfrac{\log n}{n}$ **k)** $\dfrac{1}{n+5}$ **l)** $\dfrac{2^n}{n^n}$

m) i^n **n)** $\dfrac{i^n}{n}$ **o)** $\dfrac{e^{in}}{n^2}$

7. Probar

a) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \alpha$ si y sólo si $\lim\limits_{z\to a} \overline{f(z)} = \overline{\alpha}$

b) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \alpha$ si y sólo si $\lim\limits_{z\to a} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(\alpha)$ y $\lim\limits_{z\to a} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(\alpha)$

8. Calcular

a) $\lim\limits_{z\to -i} z.\overline{z}$ **b)** $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}^2}{z}$

c) $\lim\limits_{z\to i} f(z)$ para $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & , z \neq i \\ 3 + 2i & , z = i \end{cases}$

9. Sea $\varphi : \mathbb{C}_{\neq 0} \to (-\pi, \pi]$ definida por : $\varphi(z)$ es el único número de $(-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|\, e^{i\varphi(z)}$. ¿Es continua en todo su dominio? ¿Dónde lo es?

NOTA: dado $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, al número $\varphi(z)$ se lo llama **argumento principal de** z y se lo nota : $\varphi(z) = \operatorname{Arg}(z)$.

10. Encontrar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones

a) $f(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z)$ **b)** $f(z) = \dfrac{z}{z^4 + 1}$

11. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden definir en $z = 0$ de modo tal que resulten continuas en $\mathbb{C}$?

a) $\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$ **b)** $\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$

c) $\dfrac{(\operatorname{Re}(z))^2}{|z|}$ **d)** $\dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$