Práctica 4

1. Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ definida sobre $A \subset \mathbb{R}$, en los siguientes casos:

   a) $f_n(x) = x^n$ $\quad A = (-1, 1]$

   b) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ $\quad A = \mathbb{R}$

   c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ $\quad A = [0, 1]$

   d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x}$ $\quad A = \mathbb{R}$

   e) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ $\quad A = (1, +\infty)$

2. Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en A, para:

   a) $f_n(x) = x^n$ $\quad A = (0, \frac{1}{2}]$

   b) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n^2+3}\,\mathrm{sen}(2nx - n\pi)$ $\quad A = \mathbb{R}$

   c) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ $\quad A = [2, 5]$

3. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

   a) $\dfrac{\mathrm{sen}(nx)}{n}$ en $\mathbb{R}$ **b)** $\mathrm{sen}(\frac{x}{n})$ en $\mathbb{R}$ **c)** z^n en $|z| < 1$

   d) $\dfrac{n}{n+1} z$ en $\mathbb{C}$ **e)** $\dfrac{1}{nz}$ en $\mathbb{C}_{\neq 0}$ **f)** nz^2 en $\mathbb{C}$

4. Mostrar que $\dfrac{1}{1+nx}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0, 1)$. Probar que esta sucesión converge uniformemente sobre todo intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$.

5. Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en $A \subset \mathbb{C}$, probar que la convergencia es uniforme si y sólo si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| = 0$.

6. Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Probar

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge (absolutamente) si y sólo si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ convergen (absolutamente).

b) si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

7. **a)** Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$?. Demostrarlo.

   b) Idem para $|\alpha| > 1$. ¿Qué se puede decir en el caso $|\alpha| = 1$?

   c) Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

   - converge si $|z| < 1$
   - diverge si $|z| > 1$.

8. **a)** Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \dfrac{z}{1-z}$ para $|z| < 1$.

   b) Sea $z = re^{i\theta}$ con $0 < r < 1$. Usar **a)** para verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

9. Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas cuyo término general es:

a) $\dfrac{2i}{3^n}$	**b)** $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$	**c)** $\dfrac{2^n}{5^n - n}$
d) $\dfrac{1}{n!}$	**e)** $\dfrac{n}{n^n}$	**f)** $\dfrac{n}{n^2 - n}$
g) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$	**h)** $(-1)^n \dfrac{\log n}{n}$	**i)** $\dfrac{2^n}{n^n}$
j) i^n	**k)** $\dfrac{i^n}{n}$	**l)** $\dfrac{e^{in}}{n^2}$

- **Producto de Cauchy**

  Dadas las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, se llama **producto de Cauchy** de ambas a la serie de término general $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

  Si ambas series convergen, siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, y al menos una de ellas lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge a AB.

10. Sean $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Verificar que $\sum a_n = \sum b_n$ convergen (condicionalmente) y que el producto Cauchy de ambas series diverge.

- **Criterio de Weierstrass**

  Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente en X.

- **Criterio de Dirichlet**

  Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0 y existe $M > 0$ tal que $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

11. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia

    a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{1+(1+i)^n}$ **c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n z^n \ (a \in \mathbb{C})$

    d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n \ (a \in \mathbb{C})$ **e)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{(2-i)n^2} z^n$ **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$ †

    g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$ **h)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{n^2}}{2^n}$ **i)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

    j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$ **k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(-1)^n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ **l)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$

12. Probar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ tiene un valor finito en todos los puntos interiores y sobre su círculo de convergencia, pero que esto no es verdadero para la serie de las derivadas.

13. Observar que los conceptos de convergencia uniforme y absoluta son independientes, probando:

    a) La serie $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ converge absoluta pero no uniformemente en $|z| < 1$.

    b) La serie $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{inx}}{n}$ converge uniformemente pero no absolutamente en $[\delta, 2\pi - \delta],\ 0 < \delta < 2\pi$.

    c) La serie $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n^2}$ converge absoluta y uniformemente en $|z| \leq 1$.

14. **a)** Determinar el conjunto de valores z para los cuales la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$ converge y hallar su suma.

† Sobre el borde estudiar únicamente para $z = 1, i, -i$

b) Idem para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$, $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$.

15. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)z^n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+|z|}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+|z|}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{inz}}{n+1}$ **e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 3^n} \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n$

16. **Exponencial**: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

a) Probar que es entera y calcular su derivada.

b) Probar que $e^{z+z'} = e^z \,.\, e^{z'}$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$.

c) Calcular: $\left|e^z\right|$, $\operatorname{Arg} e^z$, $\operatorname{Re}(e^z)$, $\operatorname{Im}(e^z)$, $\overline{e^z}$

d) Probar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y calcular $1/e^z$.

e) Analizar la existencia de $\lim\limits_{|z|\to\infty} e^z$.

f) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.

g) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tale que $e^z = \pm 1$.

h) Mostrar que $\left|e^z - 1\right| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

17. **Funciones trigonométricas**

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad\qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

a) Probar que $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ son enteras y calcular sus derivadas.

b) Probar que

i) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

ii) $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

iii) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

iv) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$

v) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$

$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$

c) Verificar que ambas tienen período 2π.

d) Probar

i) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2(\operatorname{Re} z) + \operatorname{sh}^2(\operatorname{Im} z)$

ii) $|\cos z|^2 = \cos^2(\operatorname{Re} z) + \operatorname{sh}^2(\operatorname{Im} z)$

e) i) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z = 0$.

ii) Idem para $\cos z$.

f) Caracterizar los conjuntos $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{sen} z = 8\}$ y $\{z \in \mathbb{C} / \cos z = i\}$.

18. **Funciones hiperbólicas**

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad\qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

a) Verificar

i) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sh} z$, $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$

ii) $\operatorname{sh}(iz) = i \operatorname{sen} z$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$

iii) $\operatorname{sh}|\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z)$, $\operatorname{sh}|\operatorname{Im} z| \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z)$
Deducir que $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ no son acotadas en $\mathbb{C}$.

iv) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\operatorname{Re} z)\operatorname{ch}(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sh}(\operatorname{Im} z)\cos(\operatorname{Re} z)$

b) Estudiar la periodicidad de $\operatorname{sh} z$ y $\operatorname{ch} z$.

c) Hallar los ceros de ambas funciones.

d) Hallar el desarrollo en serie de potencias de ambas funciones.

19. **Logaritmo**

a) Dado $w \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = w$.

b) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y $f, g : A \to \mathbb{C}$ continuas y tales que

$$e^{f(z)} = z \quad \text{y} \quad e^{g(z)} = z$$

para todo $z \in A$. Probar que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ para todo $z \in A$.

c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$

i) Probar que A es abierto y conexo y que para cada $z \in A$ existe un único $\theta_z \in (-\pi, \pi)$ tal que $z = |z|e^{i\theta_z}$.

ii) Sea $f : A \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \ln|z| + i\theta_z$. Probar que es una rama del logaritmo.

iii) Ver que f es holomorfa en A y hallar f'.

iv) ¿Siguen siendo válidos estos resultados si se reemplaza el conjunto A por $B = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0} / r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ donde $0 < \theta_0 \leq 2\pi$?

iv) Escribir todas las ramas del logaritmo en función de la dada en ii).

d) Sean φ , ψ dos ramas del logaritmo, ¿es cierto que $\varphi(e^z) = \psi(e^z) = z$ para todo z?. Estudiar si se conservan o no para los números complejos las demás propidades del logaritmo real.

e) Calcular: $\ln i$, $\ln 1$, $\ln(1+i)$, $e^{\ln i}$.

20. Sea $\varphi(z)$ el único número del intervalo $[-\pi, \pi)$ tal que: $z = |z|e^{i\varphi(z)}$. Definimos las funciones:

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi(z)}{2}} \quad \text{y} \quad g(z) = \sqrt{|z|}e^{i(\frac{\varphi(z)}{2}+\pi)}$$

a) Probar que $f(z)^2 = g(z)^2 = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

b) ¿Son continuas en $\mathbb{C}$?

c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que f y g son continuas en A.

d) Si se reemplaza el intervalo $[-\pi, \pi)$ por $[0, 2\pi)$, ¿quién debería ser A?

e) ¿Dónde son holomorfas f y g?

f) Mostrar que $\mathrm{Re}(f) \geq 0$.

21. Sea $f : G \to \mathbb{C}$, G abierto conexo, una rama del logaritmo. Definimos la función $g : G \to \mathbb{C}$ por $g(z) = e^{bf(z)}$, $b \in \mathbb{C}$ fijo.

a) Probar que si $b \in \mathbb{Z}$: $g(z) = z^b$.

b) Si G es un abierto conexo donde está definida una rama del logaritmo y $b \in \mathbb{C}$, definimos : $z^b = e^{b\, ln z}$. Probar que esta función es holomorfa en G.

c) Calcular i^i considerando la rama principal del logaritmo. Hallar los demás valores considerando las restantes ramas. Idem para : $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π.

d) Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y sean $f, g : G \to \mathbb{C}$ ramas de z^a y z^b, respectivamente. ¿Es cierto que

- $f.g$ es una rama de z^{a+b}?
- f/g es una rama de z^{a-b}?
- si $f(G), g(G) \subset G$, $f \circ g$ y $g \circ f$ son ramas de z^{ab}?

e) Sea $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| < 4\}$. Calcular una rama de $(z-1)^{\frac{1}{3}}$ para $z \in G$

22. Describir los siguientes conjuntos

a) $\{z \in \mathbb{C}/e^z = i\}$ **b)** $\{z \in \mathbb{C}/e^z = -i\}$ **c)** $\{z \in \mathbb{C}/e^z \in \mathbb{R}\}$

d) $\{z \in \mathbb{C}/ \cos z = 1\}$ **e)** $\{z \in \mathbb{C}/ \cos z = \cos z_0\}$

23. Sea f la rama principal de $\ln(1+z)$ y $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

a) Calcular el radio de convergencia.

b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$ para z dentro del círculo de convergencia de g.

c) Deducir que $f(z) = g(z)$ para $|z| < 1$.