

## Práctica 7

---

1. Calcular

a)  $\int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta, \quad a^2 < 1$

b)  $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}, \quad a > 1$

2. Probar que

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

b)  $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

3. Calcular

a)  $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$

b)  $\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$

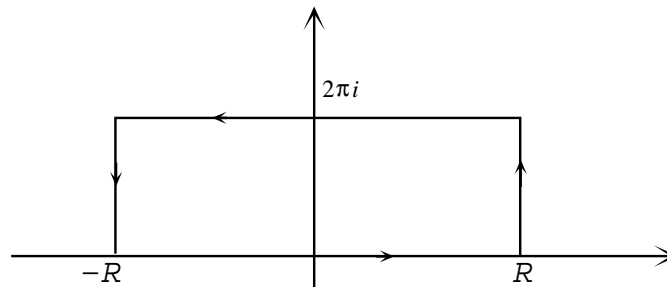
4. Calcular el valor principal de:

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$

5. Calcular  $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx$  considerando la función  $\frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$  y aplicando el teorema de los residuos sobre un recinto apropiado.

6. Verificar que  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}, \quad 0 < a < 1$ , integrando la función  $\frac{e^{az}}{1 + e^z}$  en:



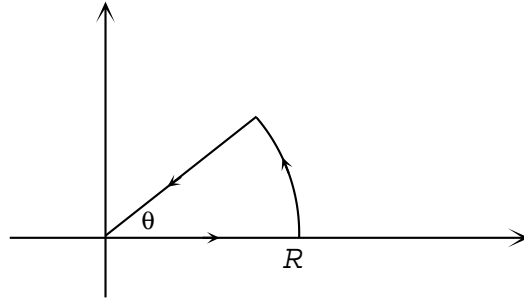
7. Sean:  $I_1 = \int_0^\infty x^a \cos x \, dx$ ,  $I_2 = \int_0^\infty x^a \sin x \, dx$ ,  $-1 < a < 0$ . Demostrar, integrando sobre un contorno adecuado la función  $z^a e^{iz}$ , que  $I_1 = -I_2 \operatorname{tg}(\frac{a}{2})$ .

8. Usando que  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$ , calcular

a) las integrales de Fresnel

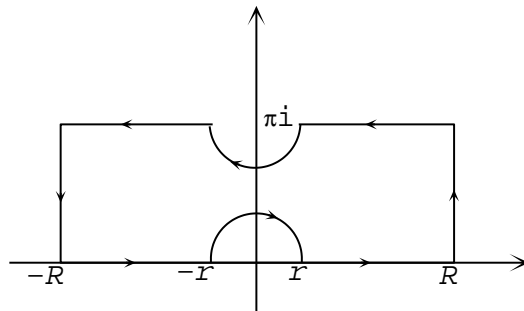
$$\int_0^\infty \cos(x^2) \, dx \quad \int_0^\infty \sin(x^2) \, dx$$

integrando la función  $e^{iz^2}$  en el recinto ( $\theta = \frac{\pi}{4}$ )



b)  $\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\theta x) \, dx$ ,  $\lambda, \theta > 0$ ; integrando la función  $e^{-\lambda z^2}$  sobre un rectángulo de lados  $\pm R$  y  $\pm R + i\theta$ .

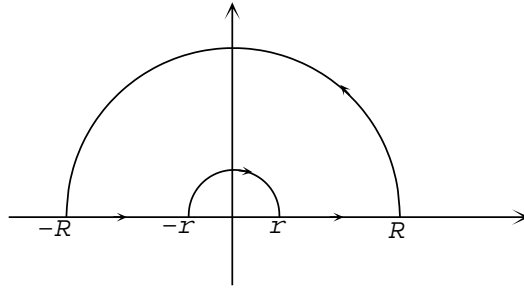
9. Calcular  $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x} \, dx$  integrando  $\frac{e^{iz}}{\operatorname{sh} z}$  en el recinto:



10. a) Dado  $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ , calcular las integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} \, dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2} \, dx$$

integrando (respectivamente) las funciones  $\frac{\log z}{z^2 + a^2}$  y  $\frac{(\log z)^2}{z^2 + a^2}$  sobre el contorno



b) Verificar que

i)  $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1} dx = 0$

ii)  $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4}$

11. Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)(2+x)} dx$$

12. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

### Series de Fourier

13. a) Verificar que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformemente a cero en  $\mathbb{R}$  pero que  $(f_n)$  no converge a cero en media cuadrática.

b) Verificar que  $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$  converge puntualmente a cero en  $[0,1]$  pero que  $(f_n)$  no converge en media cuadrática en  $[0, +\infty)$ .

c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

14. Encontrar los valores  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  de modo que la función

$$y = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función  $f(x) = 1$  en  $(0, 2)$ .

15. Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(a, b, c) = \int_{-\pi}^\pi (x^2 - a - b \cos x - c \operatorname{sen} x)^2 dx$ . Determinar el punto donde  $F$  alcanza su mínimo.

16. Sea  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  integrable y tal que se extiende a  $\mathbb{R}$  con período  $2\pi$ . Sean  $c_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) y  $b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

- a) Calcular  $c_n$  en función de  $a_n$  y  $b_n$  suponiendo que  $\bar{c}_n = c_{-n}$  y comprobar que esta relación se cumple cuando  $f(x) \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de  $f(x)$  obtener el de  $f(-x)$ .
- c) Si  $f_p(x)$  y  $f_i(x)$  son, respectivamente, las partes par e impar de  $f(x)$ , obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de  $f(x)$ .

17. a) Hallar la serie trigonométrica de Fourier de  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  para:

(i)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(ii)  $f(x) = x$

(iii)  $f(x) = x^2$

(iv)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) Usando (iii), calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ , y extendiendo  $f$  por periodicidad a  $\mathbb{R}$ , probar que:

(i)  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\text{sen}(nt)}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2)$

(ii)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

18. a) A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función  $2\pi$ -periódica que coincide con  $e^x$  en  $(-\pi, \pi)$ , calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en a), a partir del desarrollo en serie exponencial.

19. Si  $f(x) = |\text{sen } x|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , probar que  $f(x)$  es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

20. Sea  $f$  una función de período  $2\pi$  que en  $[-\pi, \pi]$  se define como  $f(x) = \cos(ax)$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

a) Desarrollar  $f$  en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie:  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n^2 - b^2)^2}$ ,  $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ .

21. Desarrollar en serie exponencial de Fourier  $f(x) = \text{sen } x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de  $f$ .

22. a) Obtener la serie exponencial de Fourier de  $f(x) = e^{\alpha e^{ix}}$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

b) Probar que:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha \cos x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

23. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x+2) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a  $f(x)$  para todo  $x$ .

• Sea  $f$  integrable en  $[-p, p]$  y tal que  $f(x+2p) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Entonces,

$$\star \int_{a-p}^{a+p} f(t) dt = \int_{-p}^p f(t) dt \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

$$\star \int_{2p}^{2p+x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

b) Si  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ , entonces:

$$g(x+2p) = g(x) \iff \int_{-p}^p f(t) dt = 0$$

24. Probar que si  $f$  es integrable y  $2p$ -periódica:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)(p-x) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{nw_0}$$

donde  $b_n$  es un coeficiente de Fourier de  $f$  y  $w_0 = \frac{\pi}{p}$ .

*Sugerencia:* usar el resultado anterior e integración por partes.

25. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en  $(0, \pi)$ :

a)  $f(x) = \cos x$

b)  $f(x) = -x$

c)  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

26. Sean:  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$  y  $g(x) = x$   $0 \leq x < \pi$

a) Calcular los desarrollos en serie de Fourier de senos de  $f$  y  $g$  y estudiar la convergencia puntual de ambas series.

b) Hallar la suma de la serie:  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4n^2} \right)$

27. Sea  $f$   $2p$ -periódica e integrable. Se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx - \frac{1}{2}at$$

donde  $a = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$ . Demostrar que  $F$  es  $2p$ -periódica.

28. Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables y  $2p$ -periódicas con desarrollos exponenciales de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t} \quad \omega = \frac{\pi}{p}$$

Probar que la función  $h(t) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t-x)g(x) dx$  también es derivable y  $2p$ -periódica y se puede expresar como:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{in\omega t}$$

29. a) Probar que la serie  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$  no es la serie de Fourier de ninguna función.

b) Calcular la  $n$ -ésima suma parcial de esta serie.

30. Sean  $f(x) = x$  en  $(-\pi, \pi)$   $2\pi$ -periódica y  $g(x) = 1$  en  $(-\pi, \pi)$ , también  $2\pi$ -periódica.

a) ¿Qué relación hay entre  $f$  y  $g$ ?

b) Calcular las series de Fourier de  $f$  y de  $g$ .

c) Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de  $f$ . ¿Es la serie de Fourier de  $g$ ? ¿Converge?

31. Dadas  $f(x) = \sen x$  y  $g(x) = \cos x$  en  $(0, \pi)$ , sean:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \quad T(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{n \cdot \sen(2nx)}{4n^2 - 1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de  $f$  y de  $g$ .

- a) ¿Se puede afirmar que  $f(x) = S(x)$  y que  $g(x) = T(x)$ ?
- b) ¿Es lícito obtener  $T(x)$  derivando término a término  $S(x)$ ?
- c) Es lícito obtener  $S(x)$  derivando término a término  $T(x)$ ?

*Sugerencia:* graficar las extensiones de  $f$  y de  $g$  a  $\mathbb{R}$ .

32. Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Sea  $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \text{sen}((2n+1)x)$  convergente para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Probar que si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in (0, \pi)$ , entonces  $f = g$ .

33. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periódicas, dadas por:

$$f(x) = x \text{ en } [0, 2\pi) \quad \text{y} \quad g(x) = x \text{ en } [-\pi, \pi)$$

- a) Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de  $f$  y de  $g$  y estudiar la convergencia puntual de dichas series.
- b) Determinar la función  $h(x)$  sabiendo que es la suma de la serie

$$\pi - 4 \sum_{n \geq 0} \frac{\text{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$$

y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de  $h$ .

34. Desarrollar  $\text{sen}^5 t$  en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

*Sugerencia:* escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

35. Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r \cos t} \cos(r \text{sen } t) \quad g(t) = e^{r \cos t} \text{sen}(r \text{sen } t) \quad h(t) = \frac{1}{1 - re^{it}} \quad 0 < r < 1$$