

Práctica 7

1. Calcular

a) $\int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta, \quad a^2 < 1$

b) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}, \quad a > 1$

2. Probar que

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

b) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

3. Calcular

a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$

b) $\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$

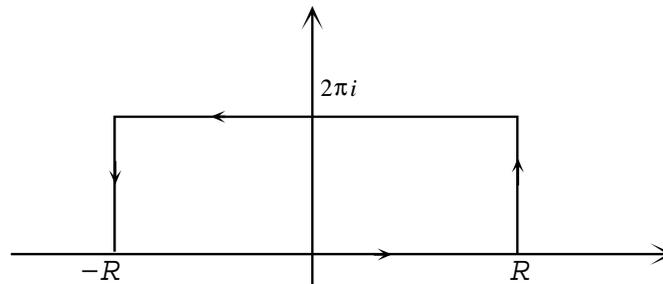
4. Calcular el valor principal de:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$

5. Calcular $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx$ considerando la función $\frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ y aplicando el teorema de los residuos sobre un recinto apropiado.

6. Verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}, \quad 0 < a < 1$, integrando la función $\frac{e^{az}}{1 + e^z}$ en:



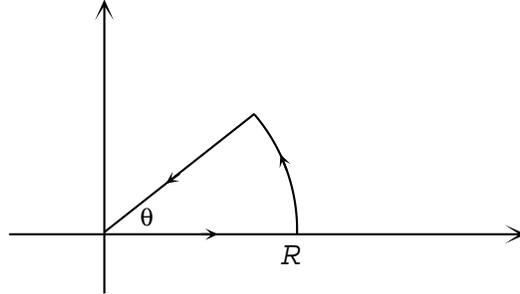
7. Sean: $I_1 = \int_0^\infty x^a \cos x \, dx$, $I_2 = \int_0^\infty x^a \sin x \, dx$, $-1 < a < 0$. Demostrar, integrando sobre un contorno adecuado la función $z^a e^{iz}$, que $I_1 = -I_2 \operatorname{tg}(\frac{a}{2})$.

8. Usando que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$, calcular

a) las integrales de Fresnel

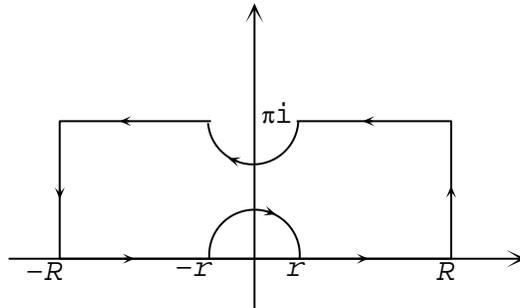
$$\int_0^\infty \cos(x^2) \, dx \quad \int_0^\infty \sin(x^2) \, dx$$

integrando la función e^{iz^2} en el recinto ($\theta = \frac{\pi}{4}$)



b) $\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\theta x) \, dx$, $\lambda, \theta > 0$; integrando la función $e^{-\lambda z^2}$ sobre un rectángulo de lados $\pm R$ y $\pm R + i\theta$.

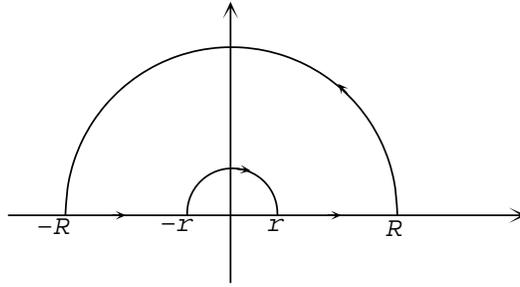
9. Calcular $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x} \, dx$ integrando $\frac{e^{iz}}{\operatorname{sh} z}$ en el recinto:



10. a) Dado $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, calcular las integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} \, dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2} \, dx$$

integrando (respectivamente) las funciones $\frac{\log z}{z^2 + a^2}$ y $\frac{(\log z)^2}{z^2 + a^2}$ sobre el contorno



b) Verificar que

i) $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + 1} dx = 0$

ii) $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$

11. Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)(2+x)} dx$$

12. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Series de Fourier

13. a) Verificar que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformemente a cero en \mathbb{R} pero que (f_n) no converge a cero en media cuadrática.

b) Verificar que $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$ pero que (f_n) no converge en media cuadrática en $[0, +\infty)$.

c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

14. Encontrar los valores A_1 , A_2 y A_3 de modo que la función

$$y = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función $f(x) = 1$ en $(0, 2)$.

15. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(a, b, c) = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b \cos x - c \operatorname{sen} x)^2 dx$. Determinar el punto donde F alcanza su mínimo.

16. Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable y tal que se extiende a \mathbb{R} con período 2π . Sean c_n ($n \in \mathbb{Z}$), a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) y b_n ($n \in \mathbb{N}$) los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

- a) Calcular c_n en función de a_n y b_n suponiendo que $\bar{c}_n = c_{-n}$ y comprobar que esta relación se cumple cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ obtener el de $f(-x)$.
- c) Si $f_p(x)$ y $f_i(x)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $f(x)$, obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de $f(x)$.

17. a) Hallar la serie trigonométrica de Fourier de $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ para:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = x$

(iii) $f(x) = x^2$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) Usando (iii), calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$, y extendiendo f por periodicidad a \mathbb{R} , probar que:

(i) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\text{sen}(nt)}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2)$

(ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

18. a) A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función 2π -periódica que coincide con e^x en $(-\pi, \pi)$, calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en a), a partir del desarrollo en serie exponencial.

19. Si $f(x) = |\text{sen } x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, probar que $f(x)$ es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

20. Sea f una función de período 2π que en $[-\pi, \pi]$ se define como $f(x) = \cos(ax)$ ($a \in \mathbb{R}$).

a) Desarrollar f en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n^2 - b^2)^2}$, $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

21. Desarrollar en serie exponencial de Fourier $f(x) = \text{sen } x$, $0 \leq x \leq 1$. A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de f .

22. a) Obtener la serie exponencial de Fourier de $f(x) = e^{\alpha e^{ix}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

b) Probar que: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha \cos x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

23. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x+2) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a $f(x)$ para todo x .

• Sea f integrable en $[-p, p]$ y tal que $f(x+2p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Entonces,

$$\star \int_{a-p}^{a+p} f(t) dt = \int_{-p}^p f(t) dt \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

$$\star \int_{2p}^{2p+x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

b) Si $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, entonces:

$$g(x+2p) = g(x) \iff \int_{-p}^p f(t) dt = 0$$

24. Probar que si f es integrable y $2p$ -periódica:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)(p-x) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{nw_0}$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $w_0 = \frac{\pi}{p}$.

Sugerencia: usar el resultado anterior e integración por partes.

25. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en $(0, \pi)$:

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = -x$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

26. Sean: $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ y $g(x) = x$ $0 \leq x < \pi$

a) Calcular los desarrollos en serie de Fourier de senos de f y g y estudiar la convergencia puntual de ambas series.

b) Hallar la suma de la serie: $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4n^2} \right)$

27. Sea f $2p$ -periódica e integrable. Se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx - \frac{1}{2}at$$

donde $a = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$. Demostrar que F es $2p$ -periódica.

28. Sean f y g funciones derivables y $2p$ -periódicas con desarrollos exponenciales de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t} \quad \omega = \frac{\pi}{p}$$

Probar que la función $h(t) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t-x)g(x) dx$ también es derivable y $2p$ -periódica y se puede expresar como:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{in\omega t}$$

29. a) Probar que la serie $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ no es la serie de Fourier de ninguna función.

b) Calcular la n -ésima suma parcial de esta serie.

30. Sean $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ 2π -periódica y $g(x) = 1$ en $(-\pi, \pi)$, también 2π -periódica.

a) ¿Qué relación hay entre f y g ?

b) Calcular las series de Fourier de f y de g .

c) Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f . ¿Es la serie de Fourier de g ? ¿Converge?

31. Dadas $f(x) = \sen x$ y $g(x) = \cos x$ en $(0, \pi)$, sean:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \quad T(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{n \cdot \sen(2nx)}{4n^2 - 1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de f y de g .

- a) ¿Se puede afirmar que $f(x) = S(x)$ y que $g(x) = T(x)$?
- b) ¿Es lícito obtener $T(x)$ derivando término a término $S(x)$?
- c) Es lícito obtener $S(x)$ derivando término a término $T(x)$?

Sugerencia: graficar las extensiones de f y de g a \mathbb{R} .

32. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Sea $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \text{sen}((2n+1)x)$ convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$, entonces $f = g$.

33. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódicas, dadas por:

$$f(x) = x \text{ en } [0, 2\pi) \quad \text{y} \quad g(x) = x \text{ en } [-\pi, \pi)$$

- a) Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de f y de g y estudiar la convergencia puntual de dichas series.
- b) Determinar la función $h(x)$ sabiendo que es la suma de la serie

$$\pi - 4 \sum_{n \geq 0} \frac{\text{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$$

y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de h .

34. Desarrollar $\text{sen}^5 t$ en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

Sugerencia: escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

35. Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r \cos t} \cos(r \text{sen } t) \quad g(t) = e^{r \cos t} \text{sen}(r \text{sen } t) \quad h(t) = \frac{1}{1 - r e^{it}} \quad 0 < r < 1$$