

## Práctica 1

---

1. Representar gráficamente los números:  $z, w, z + w, z - w, \bar{z}, \bar{w}, zw$ , para:

a)  $z = 2i, w = \frac{3}{2} - i$

b)  $z = -\sqrt{3} + i, w = \sqrt{3}$

2. a) Sea  $z \in \mathbb{C}$ , probar:

i)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

ii)  $2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| \leq |z|^2$

iii)  $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$

iv)  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  si  $z \neq 0$

v)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

b) Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , probar que:

i)  $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ii)  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

iii)  $|z_1||z_2| \geq \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $|z| - z = 1 + 2i$

b)  $z\bar{z} - 2|z| + 1 = 0$

c)  $z^6 + 2 = 0$

d)  $z^4 - 1 - i = 0$

4. a) Probar la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$az^2 + bz + c = 0$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{C}$  y  $a \neq 0$

b) Resolver:  $z^2 - (2i + 4)z + 10i - 5 = 0$

5. Representar gráficamente la curva dada por la ecuación  $|z - 1| + |z + 1| = 3$ . Pensada como curva en  $\mathbb{R}^2$ , ¿cuál es su ecuación cartesiana?

6. Probar que si  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ , la ecuación  $|z - 1| = c|z + 1|$  representa una circunferencia o una recta.

Representar gráficamente:  $|z - 3| = 2|z + 3|$  y  $|z - 3| < 2|z + 3|$

7. Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ , probar que  $\alpha z \bar{z} + cz + \bar{c}z + \beta = 0$  representa una circunferencia, una recta, un punto o el conjunto vacío y probar que toda circunferencia o recta puede escribirse de esta forma.

8. a) Dadas las funciones

$$t(z) = z + c, c \in \mathbb{C} \text{ fijo (traslación)}$$

$$h(z) = a(z - z_0) + z_0, \text{ con } a \in \mathbb{C}_{\neq 0}, z_0 \in \mathbb{C} \text{ (homotecia de centro } z_0 \text{ y razón } a)$$

$$i(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0 \text{ (inversión)}$$

describirlas geoméricamente. ¿Cuál es la imagen, por cada una de ellas, de una circunferencia y de una recta?

b) Probar que  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tales que  $ad - bc \neq 0$  (homografía) se escribe como composición de funciones del tipo de las dadas en a). Deducir cuál es la imagen por  $f$  de una circunferencia o de una recta.

c) Verificar que  $g(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$  es la homografía inversa de  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ .

9. Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

a) el cuadrante  $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) > 0\}$  por  $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$ .

b) el medio-disco  $\{z : \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$  por  $f(z) = \frac{2z - i}{2 + iz}$ .

10. Describir geoméricamente la región determinada por cada una de las siguientes condiciones.

Decidir si son abiertas o cerradas y si son o no conexas.

a)  $|\operatorname{Im}(z)| > 1$

b)  $\operatorname{Re}(z - iz) \leq 2$

c)  $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi, |z| > 2$

d)  $|z - 1 + 3i| \leq 1$

e)  $|z - 4| > 3$

f)  $1 < |z - 2i| \leq 2$

g)  $0 \leq \operatorname{Arg}(z^2) \leq \frac{\pi}{4} \quad (z \neq 0)$

h)  $\operatorname{Im}(z^2) > 0$

i)  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$