Práctica 9

1. **Ecuación de Euler:** $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

a) Mostrar que el cambio de variable $x = e^t$ transforma esta ecuación en una lineal a coeficientes constantes. ¿Dónde están definidas las soluciones de la ecuación transformada?

b) Hallar la solución general de:

$$- x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$$

$$- x^3 y''' + 5x^2 y'' + 3xy' = 0$$

2. **Ecuación de Legendre**

a) Hallar mediante desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$, todas las soluciones de:

$$(1 - z^2)w'' - 2zw' + a(a + 1)w = 0$$

Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite por solución un polinomio P_n tal que $P_n(1) = 1$.

Nota: P_n es el n -ésimo polinomio de Legendre.

b) Probar la fórmula de **Olinde Rodrigues**:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n]$$

3. **Ecuación de Hermite:** $w'' - 2zw' + 2aw = 0$

a) Hallar todas las soluciones.

b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}_0$, la ecuación admite un polinomio H_n como solución.

c) Probar que $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z^2}]$ es la solución de la ecuación para $a = n$.

4. Hallar los puntos singulares de las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de ellos son regulares en el sentido de Fuchs.

a) $z^2 w'' + (z + z^2)w' - w = 0$

b) $zw'' + 4w = 0$

c) $z^2 w'' + 3z^2 w' - 5w = 0$

d) $z^2 w'' + \operatorname{sen} z w' + \cos z w = 0$

5. **Ecuación de Laguerre:** $zw'' + (1 - z)w' + aw = 0$

- a) Verificar que $z = 0$ es un punto singular regular de la ecuación y hallar una solución de la forma: $z^r \sum_{n \geq 1} a_n z^n$.
- b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite un polinomio L_n como solución.
- c) Verificar que $L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} [z^n e^{-z}]$, el n -ésimo polinomio de Laguerre, es solución de la ecuación si $a = n$.

6. **Ecuación de Bessel:** $z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \nu \geq 0$.

- a) Mostrar que la ecuación tiene una solución de la forma: $z^\nu \sum_{n > 0} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$

Comprobar que tomando $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ se obtiene la solución:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

llamada **función de Bessel de primera especie de orden ν** .

- b) Mostrar que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la ecuación tiene una solución de la forma: $z^{-\nu} \sum_{n > 0} a_n z^n$,

$a_0 \neq 0$. Tomado $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu + 1)}$ se obtiene la solución

$$I_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

- c) Deducir que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la solución general de la ecuación es:

$$\omega(z) = A I_\nu(z) + B I_{-\nu}(z) \quad A, B \in \mathbb{C}$$

- d) Usando el método de Frobenius y eligiendo $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$, mostrar que la solución general — para $\nu = 0$ — es:

$$\omega(z) = A I_0(z) + B \left[\log(z) I_0(z) + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right]$$

Nota: si $\nu \in \mathbb{Z}$, la ecuación es del segundo tipo de Fuchs. Usando Frobenius se calcula una solución linealmente independiente con I_ν :

$$N_\nu(z) = (\log z) I_\nu(z) + z^{-\nu} P_\nu(z) + z^\nu f(z)$$

llamada **función de Neumann o de Bessel de segunda especie de orden ν** . P_ν es un polinomio tal que $P_\nu(0) \neq 0$ y f es una función entera. Por lo tanto, la solución general en este caso es:

$$\omega(z) = A I_\nu(z) + B N_\nu(z) \quad A, B \in \mathbb{C}$$

7. Probar que $z I_1(z)$ es solución de la ecuación:

$$zw'' - w' + zw = 0$$

8. Hallar los autovalores y las autofunciones de los siguientes problemas:

a) $u'' + \lambda u = 0$, para $0 < x < \pi$ y con las siguientes condiciones de contorno:

i) $u(0) = u(\pi) = 0$

ii) $u'(0) = u'(\pi) = 0$

iii) $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + \lambda u = 0$, $-\pi < x < \pi$, $u(-\pi) = u(\pi)$ y $u'(-\pi) = u'(\pi)$

9. Mostrar que las ecuaciones de Legendre, Bessel, Hermite y Laguerre responden a un problema de Sturm-Liouville si $a = \nu = n$ y $z \in \mathbb{R}$.

10. Usando separación de variables resolver:

a) $\frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad u(0, y) = 8e^{-3y}$

b) $\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < 1, t > 0$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, |u(x, t)| < M, u(x, 0) = 5 \operatorname{sen}(4\pi x) - 3 \operatorname{sen}(8\pi x) + 2 \operatorname{sen}(10\pi x)$$

c) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad u(2, t) = 0$

$$u(x, 0) = 8 \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) - 6 \cos\left(\frac{9\pi x}{4}\right)$$

11. Ecuación de la difusión o del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a > 0, \quad t \geq 0$$

a) Resolver: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad 0 < x < 3 \quad t \geq 0$

$$u(0, t) = 0 \quad u(3, t) = 0 \quad u(x, 0) = 25$$

b) Sabiendo que la ecuación del calor en coordenadas polares para $n = 2$ es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad t \geq 0$$

resolver la ecuación con las condiciones:

$$0 \leq r \leq 3, t \geq 0, u(3, t) = 0, u(r, 0) = r, |u(r, t)| < M, u \text{ no depende de } \theta.$$

12. Ecuación de las cuerdas vibrantes o de las ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (a > 0)$$

a) Resolver la ecuación para $n = 1$, $0 < x < 5$

$$u(0, t) = u(5, t) = 0 \quad u(x, 0) = x \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

b) Idem que a) con: $x > 0$, $t > 0$, $u(0, t) = 0$, $u(x, 0) = x = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$

c) Sabiendo que la ecuación de las ondas, para $n = 2$, en coordenadas polares es:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

hallar una solución independiente de φ para $r \leq 4$ tal que $u(4, t) = 0$, $u(r, 0) = 2$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = r$

13. Ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

★ Para $n = 2$,

a) Resolver la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 \leq x, y \leq \pi$ con las siguientes condiciones: $u(x, 0) = u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $u(x, \pi) = \sin(3x) + \sin(5x)$

b) Sabiendo que la ecuación en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

hallar la solución para $r \geq 2$ que verifica $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = 0$ y $u(2, \theta) = \sin \theta$.

★ Para $n = 3$,

c) Sabiendo que la ecuación en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

y suponiendo que u no depende de φ , hallar una solución para:

$z \geq 0$, $0 \leq r \leq 4$, $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z, r) = 0$, $u(z, 4) = 0$, $u(0, r) = r^2$, $|u(z, r)| < M$.

d) Sabiendo que la ecuación en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

i) hallar u , independiente de φ , tal que sea acotada para: $0 \leq r \leq 2$ y $u(2, \theta) = 5$.

ii) hallar u , independiente de φ , acotada para $r \geq 5$ tal que $u(5, \theta) = 2\theta$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = 0$.