Series de Fourier (versión 0.3)

Pablo De Nápoli

1. Introducción: las series de Fourier

Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es $T-$periódica si

$$f(x+T) = f(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$$

Las funciones periódicas más sencillas son las trigonométricas: $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ que son 2π- periódicas. Más generalmente, observemos que $\operatorname{sen} \alpha x$ y $\cos \alpha x$ son funciones $\frac{2\pi}{\alpha}$ periódicas. Similarmente la función, $e^{i\alpha x}$ es $\frac{2\pi}{\alpha}$- periódica.

J. Fourier, en sus trabajos sobre la propagación del calor, se planteó la siguiente pregunta: ¿ es cierto que toda función períodica se puede expresar como una combinación lineal de senos y cosenos?. Por ejemplo, si una función $f(x)$ es 2π- períodica, podemos preguntarnos si es posible expresarla como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\, nx + b_n \sin\, nx) \tag{1}$$

ya que las funciones $\cos nx$ y $\sin nx$ son las funciones $2\pi-$ periódicas más sencillas (en el primer término, el factor $\frac{1}{2}$ aparece con la finalidad de simplificar muchas fórmulas que aparecerán a continuación).

Fourier observó que las funciones seno y coseno verifican las llamadas **relaciones de ortogonalidad**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \, \forall n.m \in \mathbb{N}_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, sin\, mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} & \text{n} \neq m \\ \pi & \text{si} & m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si} & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, cos\, mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} & \text{n} \neq m \\ \pi & \text{si} & m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{si} & m = n = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la serie (1) por $\cos mx$ e integrando término a término, Fourier obtuvo que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(nx)\, dx \tag{2}$$

(el caso $n = 0$ corresponde al término constante del desarrollo). Similarmente multiplicando por $\sin nx$ e integrando término a término obtenemos que:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin(nx)\, dx \tag{3}$$

Esto quiere decir que si el desarrollo (1) es válido, sus coeficiente están determinados por la función f a partir de las relaciones (2) y (3).

Fourier mostró la validez del desarrollo (1) con numerosos ejemplos, pero la justificación rigurosa de su validez sólo fue posible gracias a los trabajos de Dirichlet, Riemann, Lebesgue y otros numerosos matemáticos. De hecho, el descubrimiento de Fourier dio nacimiento a una rama de la matemática: el análisis armónico.

1.1. Un ejemplo de Desarrollo de Fourier

Veamos un ejemplo de desarrollo de fourier. Consideremos la función signo de x definida para $x \in [-\pi, \pi)$ por

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y prolongada después para todo $x \in \mathbb{R}$ para que resulte una función $2\pi-$ periódica. En este caso los coeficientes a_n son cero ya que $f(x)\, \cos nx$ es una función impar (por serlo f), mientras que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \sin\, nx\, dx$$

por ser $f(x)\, \sin\, nx$ una función par. Deducimos que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\, nx = \frac{2}{\pi n}(-\cos(n\pi) + 1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{n es par} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{si} \quad \text{n es impar} \end{cases}$$

Por lo que se obtiene el desarrollo de Fourier:

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{7} \ldots)$$

(como veremos despúes este desarrollo es válido para todo $x \in (-\pi, \pi)$). En particular cuando $x = \frac{\pi}{2}$ se obtiene la serie de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

1.2. Notación compleja

Como sucede con muchas otras cuestiones donde intervienen las funciones trigonométricas, el estudio de las series de Fourier se simplifica enormemente si usamos la notación compleja, de acuerdo con la fórmula de Euler:

$$e^{inx} = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$

La serie de Fourier de una función f, 2π-periódica se escribe

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx} \tag{4}$$

donde los coeficientes $\alpha_n = \alpha_n(f) = \hat{f}(n)$ se determinan a partir de la fórmula

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \tag{5}$$

como puede comprobarse utilizando las relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ 2\pi & \text{si} \quad n = m \end{cases} \tag{6}$$

La fórmula de Euler proporciona la relación

$$\alpha_n + \alpha_{-n} = 2a_n$$

$$\alpha_n - \alpha_{-n} = 2ib_n$$

o sea:

$$\alpha_n = 2(a_n + ib_n)$$

$$\alpha_{-n} = 2(a_n - ib_n)$$

(si $n > 1$) y

$$a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0$$

entre los coeficientes de los desarrollos (1) y (4).

2. Espacios de Hilbert

2.1. Espacios con producto interno

En esta sección introduciremos el concepto de espacio de Hilbert. Los espacios de Hilbert son un concepto abstracto, que es útil para entender la teoría de las series de Fourier.

Un espacio con producto interno o espacio pre-Hilbert[1] es un espacio vectorial complejo H (es decir: suponemos que en H están definidas las operaciones

[1] El término espacio de Hilbert está reservado para aquellos espacios pre-Hilbert que además son completos, como veremos más adelante.

de suma y multiplicación por un número complejo), donde está definido un producto interno o escalar $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ para todo par de vectores $x, y \in H$. Es decir el producto escalar es una función de $H \times H$ en $\mathbb{C}$.

Suponemos que el producto interno verifica los siguientes **axiomas del producto interno** (Estos axiomas imitan las propiedades del producto interno en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$):

- **Axioma 1:** El producto interno es lineal en la primera variable.

$$\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = \langle x_1 + x_2, y\rangle \ \forall x_1, x_2, y \in H$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \ \forall x, y \in H; \lambda \in \mathbb{C}$$

- **Axioma 2:** El producto interno verifica que

$$\langle y, x\rangle = \overline{< x, y >} \forall x, y \in H$$

  (en particular este axioma implica que $\langle x, x\rangle$ es un número real, ya que es igual a su conjugado)

- **Axioma 3:** Para cualquier $x \in H$, tenemos que $\langle x, x\rangle \geq 0$, y se tiene que $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Observemos que como consecuencia de los axiomas 1 y 2, el producto escalar es anti-lineal en la segunda variable en el sentido de que verifica

$$\langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle = \langle x, y_1 + y_2\rangle$$

pero los escalares salen conjugados:

$$\langle x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$$

Si H es un espacio con producto interno, para cada $x \in H$ definimos su norma por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

El axioma 3 establece entonces que $\|x\| \geq 0$, y que $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

En algunos casos se considera también espacios de Hilbert reales (o sea que son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, y el producto interno da como resultado un número real). En este caso, en las propiedades anteriores puede omitirse la conjugación. Nosotros trabajaremos con espacios de Hilbert complejos, porque necesitamos considerar funciones que pueden tomar valores complejos.

2.2. Ejemplos de espacios (pre-)Hilbert

Ejemplo 1: El ejemplo más sencillo de un espacio de (pre-)Hilbert, es el espacio $\mathbb{C}^n$ de las n-uplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números complejos, con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

y la norma dada por

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}$$

(similarmente $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert real con el producto interno y la norma usuales).

Ejemplo 2: Para estudiar las series de Fourier, resulta útil considerar un espacio cuyos elementos son funciones. Esta idea de considerar a las funciones como puntos de un espacio, y poder por lo tanto aplicarles conceptos geométricos, es la idea clave del análisis funcional. En nuesto caso el espacio que vamos a considerar es

$$H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \, \text{continuas} \, 2\pi - \text{periodicas}\}$$

con el producto interno definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

y la norma dada por:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Más generalmente se puede tomar como H el espacio (más grande)

$$H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \, 2\pi - \text{periodicas tales que} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \text{ existe}\}$$

Como veremos, este es el espacio natural para trabajar en la teoría de las series de Fourier. Sin embargo, para obtener resultados completamente satisfactorios deberíamos utilizar la teoría de la integral de Lebesgue (una generalización de la integral de Riemann), lo que está fuera del nivel del curso. Este espacio recibe el nombre de $L^2[-\pi, \pi]$.[2]

[2] Ver por ejemplo [Kolmogorov], capítulo VIII.

2.3. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sumamente útil resulta la siguiente desigualdad:

Proposición 2.1 *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Para todo $x, y \in H$ se verifica*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz permite probar que la norma verifica la desigualdad triangular

Proposición 2.2 *Para todo $x, y \in H$ se verifia que*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

2.4. Distancia y convergencia

La introducción de una norma en un espacio (pre)-Hilbert H permite definir la noción de distancia $d(x, y)$ entre dos vectores de H por:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Esta noción de distancia satisface los siguiente axiomas de la distancia

1. **Axioma D1:** $d(x, y) \geq 0$ **y** $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. **Axioma D2:** $d(x, y) = d(y, x) \, \forall x, y \in H$
3. **Axioma D3:** (Desigualdad triangular)

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \, \forall x, y \in H$$

(Se dice que H es con esta noción de distancia, un espacio métrico). Esta noción de distancia permite darle un sentido a la noción de convergencia de sucesiónes en H: decimos que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de H converge a un elemento $x \in H$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.

En particular esta noción se aplica a las funciones del espacio $L^2[-\pi, \pi]$: decimos que una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de $L^2[-\pi \, \pi]$ converge a una función f en el sentido de L^2, o como también se dice **en media cuadrática**, si verifica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \to 0 \, \text{cuando} \, n \to \infty$$

Notemos que esta noción significa que "en promedio" f_n converge a f, pero no tiene porqué suceder que $f_n(x_0)$ converja a $f(x_0)$ para ningún x_0. Como veremos luego, esta noción de convergencia es la que resulta más adecuada para el estudio de las series de Fourier.

2.5. Los espacios de Hilbert y la mecánica cuántica

Además de las series de Fourier, los espacios de Hilbert tienen muchas otras aplicaciones en la matemática pura y aplicada. No quisiera dejar de mencionarles que los espacios de Hilbert son la base del formalismo matemático de la mecánica cuántica. La mecánica cuántica es una teoría física que describe el comportamiento de los sistemas atómicos (y subatómicos). Como conseucencia del principio de incertidumbre de Heisenberg, no es posible medir (simultáneamente) con completa exactitud la posición y la velocidad de una partícula subatómica (por ejemplo, un electron). Por ello, en la mecánica cuántica no se intenta ya determinar la posición exacta de un electrón. Si no que en cambio, se encuentra una distribución de probabilidad de su posición (o su velocidad).

Por ejemplo, consideremos el caso de un modelo unidimensional, en el cual un electrón se mueve a lo largo de una linea recta. En este caso, el estado del electron se describe mediante una función ψ con valores complejos, que recibe el nombre de función de onda. El significado físico de ψ es el siguiente: si tomamos un intervalo (a,b) de la recta, la probabilidad de que el electron se encuentre allí viene dada por la integral

$$P_{a,b} = \int_a^b |\psi(x)|^2 \, dx$$

Naturalmente debemos tomar ψ de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

(porque la probabilidad de encontrar el electron en algún lugar de la recta debe ser 1). Entonces ψ debe ser un elemento del espacio de Hilbert $L^2(-\infty,\infty)$ de las funciones que verifican que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx$$

es finita. Así pues las funciones de onda viven naturalmente en un espacio de Hilbert.

2.6. Ortogonalidad

En $\mathbb{R}^n$ sabemos que dos vectores son perpendiculares u ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero. Esto motiva la siguiente definición: decimos que un conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ de vectores de un espacio con producto interno es **ortogonal** si $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ (para $i,j \in I$). Diremos que es **ortonormal** si además verifica que $\|x_i\| = 1$ para todo $i \in I$.

Por ejemplo las funciones $e_n(x) = e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ son un conjunto ortogonal en el espacio $L^2[-\pi,\pi]$ del ejemplo 2, en virtud de las relaciones de ortogonalidad (6).

Siempre que tenemos un sistema ortogonal, podemos convertirlo en ortonormal dividiendo a cada vector por su norma. Así pues

$$\tilde{e}_n(x) = \frac{e^{nx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{7}$$

es un sistema ortonormal en $L^2[-\pi, \pi]$.

Similarmente, las funciones

$$s_n(x) = \operatorname{sen} nx \, \text{si} \, n \in \mathbb{N}$$

$$c_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si} \quad n = 0 \\ \cos nx & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

forman otro sistema ortogonal en $L^2[-\pi, \pi]$.

Si H es un espacio pre-Hilbert, por analogía con lo que sucede en $\mathbb{R}^n$, diremos que un sistema ortogonal $\{x_i\}_{i \in I}$ es una base de H si sucede que cada $x \in H$ se puede escribir como una serie

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \tag{8}$$

(en nuestros ejemplos: $I = \mathbb{Z}$ y $I = \mathbb{Z}$). En este caso, utilizando la ortogonalidad supuesta de los coeficientes x_i tenemos que

$$\lambda_i = \frac{1}{\|x_i\|^2} \langle x, x_i \rangle$$

En nuestros ejemplos, se obtienen las fórmulas (2-3) y (5).

Así pues, el concepto de espacio de Hilbert nos permite pensar a las series de Fouerier como análogas a la escritura de un vector como combinación lineal de los vectores de una base ortogonal.

La serie (8) debe interpretarse en el sentido de que sus sumas parciales convergen a x en el sentido de la norma del espacio H. Así por ejemplo cuando $I = \mathbb{N}$, (8) significa que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \right\|_H \to 0 \, \text{cuando} \, k \to \infty$$

(cuando $I = \mathbb{Z}$ las sumas parciales deben tomarse con i yendo de $-k$ a k).

Si f y g son ortogonales tenemos que

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

(Esta igualdad es una versión abstracta del teorema de Pitágoras). Más generalmente si $\{x_i\}_{i \in I}$ es un sistema ortonormal, tenemos que:

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} |\lambda_i|^2$$

2.7. La desigualdad de Bessel

Proposición 2.3 *(Desigualdad de Bessel) Sea $\{x_i\}$ un sistema ortonormal en un espacio pre-Hilbert H, entonces si $x \in H$ y $\lambda_k = \langle f, x_k \rangle$ entonces tenemos que*

$$\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^2 \leq \|x\|^2$$

Dem: *Definamos*

$$y = x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

entonces

$$0 \leq \|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, x \rangle - \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} \langle x, x_i \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \langle x_i, x_j \rangle$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$$

luego

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \|x\|^2$$

En el caso del sistema trigonométrico (7) obtenemos que si $f \in L^2[-\pi, \pi]$ entonces

$$\sum_{n=-N}^{N} |\alpha_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Haciendo que $N \to \infty$, vemos que la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n(f)|^2$$

converge, y además

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

2.8. El Lema de Riemman-Lebesgue

Como corolario inmediato de los resultados anteriores obtenemos:

Corollary 2.4 *(Lema de Riemann-Lebesgue para L^2) Si $f \in L^2[-\pi,\pi]$ entonces $\alpha_n(f) \to 0$ cuando $n \to \pm\infty$*

De hecho si $f \in L^2[-\pi,\pi]$, entonces la serie

$$\sum_n |\alpha_n(f)|^2$$

converge, y en consecuencia $\alpha_n(f) \to 0$ cuando $n \to \pm\infty$.

Mencionamos, sin demostrarlo, que en realidad el lema de Riemann-Lebesgue es cierto con sólo suponer que la función f es integrable en $[-\pi,\pi]$ (en el sentido de Lebesgue). [3]

2.9. El orden de magnitud de los coeficientes de Fourier y la suavidad de la función

Si f es una función C^1 podemos dar una demostración directa del lema de Riemman-Lebesgue que proporciona una estimación más precisa:

Proposición 2.5 *(Lema de Riemann Lebesgue para funciones C^1) Si f es una función $2\pi-$periódica continua que es de clase C^1por trozos en $[-\pi,\pi]$ entonces existe una constante $C = C(f)$ tal que:*

$$|\alpha_n(f)| \leq \frac{C}{|n|}$$

En particular, los coeficientes de Fourier $\alpha_n(f)$ tienden a cero cuando $n \to \pm\infty$.

Para demostrar el lema de Riemann-Lebesgue con la hipótesis de que $f \in C^1$, es suficiente con integrar por partes:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ixn}\, dx = f(x)\frac{e^{inx}}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{e^{inx}}{in} dx$$

Si $f$en lugar de ser C^1es solamente continua y C^1a trozos, igual podemos hacer esta cuenta subdividiendo el intervalo de integración e integrando por partes en cada uno de los subintervalos donde $f$es de clase C^1. La continuidad de f hace que se cancelen los términos de borde que aparecen.

Como f es una función 2π periódica, $f(\pi) = f(-\pi)$. Deducimos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ixn}\, dx = -\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{inx}\, dx \tag{9}$$

y por lo tanto

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ixn}\, dx\right| \leq \frac{1}{\alpha|n|}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|\, dx$$

[3]Ver [Kolmogorov], capítulo IX, sección 1

lo que proporciona la estimación:

$$|\alpha_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^k} \text{si } n \neq 0$$

(donde $C = C(f)$ es una constante que depende de f pero no de n).

Notemos también que la ecuación (9) significa que existe una relación entre los coeficientes de f y los f', a saber:

$$\alpha_n(f') = in\alpha_n(f)$$

Observemos también que si f fuera de clase C^2 (en lugar de C^1) podríamos volver a integrar por partes, obteniendo que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ixn}\, dx = \frac{1}{(in)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) e^{ixn}\, dx$$

lo que proporciona una estimación de la forma:

$$|\alpha_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^2}$$

para los coeficientes de Fourier de f. En general, cuanto más suave sea f, más rápidamente tenderán a cero sus coeficientes de Fourier, una repetición del argumento anterior nos proporciona:

Proposición 2.6 *Si f es de clase C^k en $[-\pi, \pi]$ y su derivada de orden $k+1$es continua a trozos, entonces existe una constante $C = C(f, k)$ tal que*

$$|\alpha_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^{k+1}}$$

3. La convergencia puntual de las series de Fourier

Nuestro próximo objetivo será investigar en qué sentido son válidos los desarrollos de Fourier (1) y (4). Será suficiente analizar qué sucede con este último, porque como ya vimos ambos desarrollos son equivalentes.

Recordando que la convergencia de una serie no significa otra cosa que la convergencia de sus sumas parciales, introduzcamos la $N-$ésima suma parcial de (4) por

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n(f) e^{inx}$$

Nos preguntamos: ¿en qué sentido podemos decir que $S_N f(x) \to f(x)$ cuando $N \to \infty$?

Nuestro objetivo será probar el siguiente teorema:

Teorema 3.1 *Sea f una función 2π−periódica en $L^2[-\pi,\pi]$. Si f es de clase C^1 en un entorno del punto $x_0 \in [-\pi,\pi]$, entonces $S_N f(x_0) \to f(x_0)$ conforme $N \to \infty$.*

Notemos que en realidad este teorema continua siendo cierto bajo condiciones mucho más débiles que las enunciadas. Sin embargo, la continidad de f en x_0 no es suficiente (existen ejemplos de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en algunos puntos [4]).

3.1. Demostración del teorema 3.1[5]

Para demostrar el teorema (3.1), supongamos primero que $x_0 = 0$ y notemos que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(0) = 0$ (restando sino a f una constante). Introduzcamos entonces la función:

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix}-1} \, (x \neq 0)$$

Observemos que por la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{f'(0)}{i}$$

por lo que podemos hacer a g continua en 0 definiendo $g(0) = \frac{f'(0)}{i}$. Entonces si $f \in L^2[-\pi,\pi]$, deducimos que $g \in L^2[-\pi,\pi]$.

Calculemos los coeficientes de Fourier de g:

$$\alpha_n(f) = \left\langle f, e^{inx} \right\rangle = \left\langle g(x)(e^{ix}-1), e^{inx} \right\rangle = \left\langle g(x)e^{ix}, e^{inx} \right\rangle - \left\langle g(x), e^{inx} \right\rangle$$

$$\alpha_n(f) = \left\langle g(x), e^{i(n-1)x} \right\rangle - \left\langle g(x), e^{inx} \right\rangle = \alpha_{n-1}(g) - \alpha_n(g)$$

entonces al calcular la N−ésima suma parcial de la serie de Fourier nos queda una suma telescópica:

$$S_N(f)(0) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n(f) = \sum_{n=-N}^{N} [\alpha_{n-1}(g) - \alpha_n(g)]$$

por lo que:

$$S_N(f)(0) = \alpha_{-N-1}(g) - \alpha_N(g)$$

entonces

$$S_N(f)(0) \to 0 = f(x_0)$$

[4] Un ejemplo puede verse en R.Wheeden-A. Zygmund "Measure and Integral" - capítulo 12- sección 4.

[5] Esta demostración no es la demostración estándar, que puede verse por ejemplo en el libro de [Courant]. Esta demostración se debe a P. Chernoff. The American Mathematical Monthly, volumen 87, nº5 (pag. 399)

cuando $N \to +\infty$, por el lema de Riemann-Lebesgue (ya que $g \in L^2[-\pi, \pi]$).

Si suponemos ahora que $x_0 \neq 0$, consideramos la función $\tilde{f}$definida por:

$$\tilde{f}(x) = f(x_0 + x)$$

Analizemos cual es la relación entre los coeficientes de Fourier de f y los de $\tilde{f}$: haciendo el cámbio de variable $y = x + x_0$ encontramos que:

$$\alpha_n(\tilde{f}) = \int_0^T f(x_0 + x)e^{-inx}dx = \int_{x_0}^{T+x_0} f(y)e^{-in(y-x_0)}dy$$

y teniendo en cuenta que el integrando es una función periódica, deducimos que

$$\alpha_n(\tilde{f}) = e^{inx_0} \int_0^T f(y)e^{-iny}dy = e^{inx_0}\alpha_n(f)$$

Deducimos que:

$$S_N(\tilde{f})(0) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n(f) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n(f)e^{inx_0} = S_N(f)(x_0)$$

En consecuencia, aplicando a $\tilde{f}$el resultado ya demostrado (para $x_0 = 0$), vemos que

$$S_N(f)(x_0) \to \tilde{f}(0) = f(x_0) \text{ cuando } N \to \infty$$

4. La convergencia uniforme de las series de Fourier

Teorema 4.1 *Si $f$es una función periódica continua que es C^1a trozos, entonces su serie de Fourier converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$*

5. La convergencia de las series de Fourier en L^2

Teorema 5.1 *Sea $f \in L^2[-\pi, \pi]$, entonces su serie de Fourier converge a $f$en L^2, o como también se dice, en media cuadrática. Es decir que:*

$$\|S_N(f) - f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \to 0 \,\text{cuando}\, N \to \infty$$

6. El método de separación de variables y las series de Fourier

Referencias

[Courant] R. Courant, F. John. Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Volumen 1. Limusa (1985). Capítulo 8

[Kolmogorov] A. Kolmogorov, S.V. Fomín. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Editorial Mir, (1975), Capítulo VIII y IX.

[Riesz] F. Riesz y Sz. Nagy. Functional Analysis. Frederich Ungar Publishing Co. (1955)

El libro [Courant] es un excelente libro de análisis I. Contiene una exposición elemental (sin espacios de Hilbert ni integral Lebesgue), pero rigurosa de las series de Fourier.

Los libros [Kolmogorov] y [Riesz] exceden largamente el nivel de este curso. Pueden servir para aquellos alumnos que deseen profundizar en los temas expuestos. En particular, el capítulo 2 del libro [Riesz] contiene una exposición agradable sobre la integral Lebesgue y el espacio L^2.