Práctica 3

1. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = z$ **b)** $f(z) = z^2$ **c)** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

2. Verificar que valen todas las reglas de derivación conocidas para el caso de funciones reales de variable real.

3. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

   a) Calcular:
   $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \quad ; \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}$$
   en términos de u y de v. ¿Qué se deduce?

   b) Suponiendo que u y v son de clase C^2, calcular $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ en z_0.

   c) Calcular $f'(z_0)$ en términos de u y de v.

4. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ y sea $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

   a) Probar que g es diferenciable en (x_0, y_0).

   b) Calcular $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(x_0,y_0)$ en términos de u y de v.

   c) ¿Es cierto que si f es abierta g también lo es? ¿Y el recíproco?

5. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Probar que existe $\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}-$lineal , tal que
   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-\alpha(h)}{h} = 0$$

- **Regla de L'Hospital**

  Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:
  $$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

6. Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1}$

b) $\displaystyle\lim_{z\to 2i}\frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$

c) $\displaystyle\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}}\frac{z-e^{\frac{\pi i}{3}}}{z^3+1}$

d) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2-2iz+1}{z^4+2z^2+1}$

7. Sea $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre sus partes real e imaginaria de modo que resulte derivable en $a\in\mathbb{R}$ y calcular $\gamma'(a)$. Calcular $\gamma'(t)$ para $\gamma(t)=\cos t+i\operatorname{sen} t$.

8. Sean $f,g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ dadas por

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}\qquad\qquad g(x+iy)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & x+iy\neq 0\\ 0 & x+iy=0\end{cases}$$

Demostrar que f, g son continuas en 0 y que cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann pero no son derivables.

9. Dada la función

$$f(x+iy)=\begin{cases}\dfrac{x^3y+i(x^2y^2)}{x^4+y^2} & x+iy\neq 0\\ 0 & x+iy=0\end{cases}$$

a) verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en el $(0,0)$.

b) probar que hay derivada a lo largo de cualquier recta que pasa por $(0,0)$ y que todas esas derivadas coinciden en el origen.

c) probar que f no es derivable en $z=0$.

10. a) Mostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares se escriben:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\qquad\qquad\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

b) Escribir $f'(z)$ en coordenadas polares.

c) Calcular la derivada de $f(z)=z^{\frac{m}{n}}=r^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\theta}{n}+i\operatorname{sen}\frac{m\theta}{n})$

11. Determinar los puntos donde f es derivable y donde es holomorfa.

a) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x+iy}{x^2+y^2} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$

b) $f(z)=\overline{z}$

c) $f(z) = x^2 + iy^2$

d) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

12. Determinar si las siguientes funciones son holomorfas en los conjuntos especificados y, en caso de no serlo, encontrar un conjunto abierto en el que la función sea holomorfa o bien demostrar que no es holomorfa en ninguna parte.

a) $f(z) = \dfrac{3+2z}{i+2z}$ en $D : |z| < 1$

b) $f(z) = \cos x$ en $D : |z| < 1$

c) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ en $\mathbb{C}$

d) $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ en $\mathbb{C}$ (P , Q polinomios)

e) $f(z) = \dfrac{P(z).Q(z)}{z}$ en $D : 0 < |z| < 1$ (P , Q polinomios)

13. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones y hallar $f'(z)$ en cada caso.

a) $f(z) = z^3 - 2z$

b) $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$

c) $f(z) = z^2\overline{z}$

d) $f(z) = x^2 + iy^3$

e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Probar:

a) Si f y $\overline{f}$ son holomorfas en Ω, entonces f es constante.

b) Si f es holomorfa en Ω y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.

c) Si f y g son holomorfas en Ω y $f' = g'$ en Ω, entonces $f - g$ es constante en Ω.

¿Es necesaria la hipótesis de conexión?

15. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Probar:

a) $\operatorname{Re}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.

b) $\operatorname{Im}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.

c) $|f|$ constante $\Rightarrow f$ constante.

d) $\operatorname{Arg}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.

16. Sea $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$.

a) Probar que u es armónica.

b) Encontrar v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa.

c) Hacer lo mismo para $u(x, y) = 2x(1 - y)$

17. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es conjugada armónica de u (en Ω) si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

    a) Probar que si v y $\widetilde{v}$ son conjugadas armónicas de u en Ω, entonces v y $\widetilde{v}$ difieren en una constante aditiva. ¿Falta alguna hipótesis?

    b) Probar que si u y v son mutuamente conjugadas armónicas, entonces son constantes. ¿Falta alguna hipótesis?

18. **a)** Hallar todas las funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ tales que su parte real es $x^2 - y^2$.

    b) Hallar el polinomio armónico más general entre los de la forma:

    $$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

    Encontrar además la función armónica conjugada y la correspondiente función holomorfa.

    c) Encontrar una función f holomorfa en todo el plano complejo cuya parte real sea $e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y)$.

    d) Mostrar que $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ es armónica. Indicar su dominio de armonicidad y hallar una función holomorfa que tenga a f como parte imaginaria.

    e) Dada $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 se sabe que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) = F(xy)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. ¿Cómo debe ser F?

19. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(z).\overline{f(z)} \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $g(z) = \log |f(z)|$ es armónica en Ω.