Práctica 7

1. Calcular

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\, d\theta, \quad a^2<1$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}, \quad a>1$

2. Probar que

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

   b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

3. Calcular

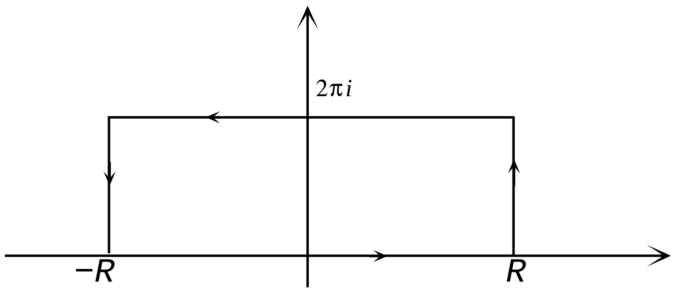
   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\, dx$

4. Calcular el valor principal de:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3-4x^2+5x}$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4)(x-1)} dx$

5. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\, dx$ considerando la función $\displaystyle\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ y aplicando el teorema de los residuos sobre un recinto apropiado.

6. Verificar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}$, $0<a<1$, integrando la función $\displaystyle\frac{e^{az}}{1+e^z}$ en:



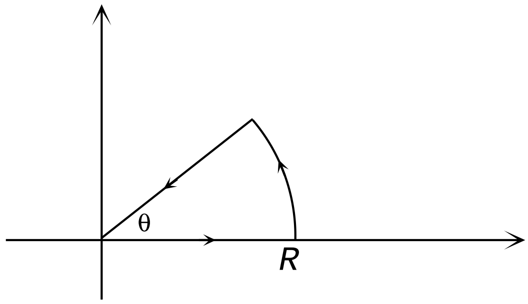
7. Sean: $I_1 = \int_0^\infty x^a \cos x \; dx, \quad I_2 = \int_0^\infty x^a \operatorname{sen} x \; dx, \quad -1 < a < 0$. Demostrar, integrando sobre un contorno adecuado la función $z^a \, e^{iz}$, que $I_1 = -I_2 \; \operatorname{tg}(\pi \frac{a}{2})$.

8. Usando que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \; dx = \sqrt{\pi}$, calcular

   a) las integrales de Fresnel

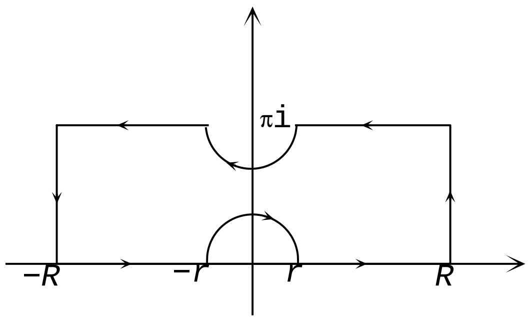
$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx \qquad\qquad \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) dx$$

   integrando la función e^{iz^2} en el recinto $(\theta = \frac{\pi}{4})$



   b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\theta x) \; dx, \quad \lambda, \; \theta > 0$; integrando la función $e^{-\lambda z^2}$ sobre un rectángulo de lados $\pm R$ y $\pm R + i\theta$.

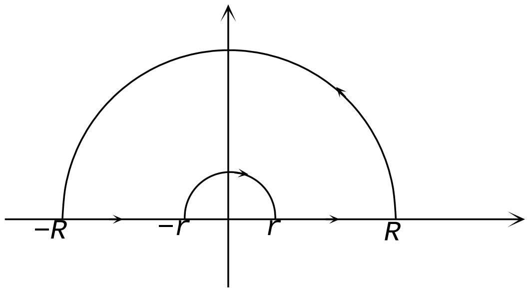
9. Calcular $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x} \; dx$ integrando $\frac{e^{iz}}{\operatorname{sh} z}$ en el recinto:



10. **a)** Dado $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, calcular las integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} \; dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2} \; dx$$

   integrando (respectivamente) las funciones $\frac{\log z}{z^2 + a^2}$ y $\frac{(\log z)^2}{z^2 + a^2}$ sobre el contorno



b) Verificar que

i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx = 0$ **ii)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$

11. Calcular
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)(2+x)}\,dx$$

12. Probar que
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Series de Fourier

13. **a)** Verificar que
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$
converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$ pero que (f_n) *no* converge a cero en media cuadrática.

b) Verificar que $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$ converge puntualmente a cero en [0,1] pero que (f_n) *no* converge en media cuadrática en $[0, +\infty)$.

c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

14. Encontrar los valores A_1, A_2 y A_3 de modo que la función
$$y = A_1 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}x)$$
sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función $f(x) = 1$ en $(0, 2)$.

15. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(a,b,c) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b\cos x - c \operatorname{sen} x)^2\,dx$. Determinar el punto donde F alcanza su mínimo.

16. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrable y tal que se extiende a $\mathbb{R}$ con período 2π. Sean c_n $(n \in \mathbb{Z})$, a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ y b_n $(n \in \mathbb{N})$ los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

    a) Calcular c_n en función de a_n y b_n suponiendo que $\bar{c}_n = c_{-n}$ y comprobar que esta relación se cumple cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

    b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ obtener el de $f(-x)$.

    c) Si $f_p(x)$ y $f_i(x)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $f(x)$, obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de $f(x)$.

17. **a)** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ para:

    (i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \le 0 \end{cases}$

    (ii) $f(x) = x$

    (iii) $f(x) = x^2$

    (iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$

    b) Usando **(iii)**, calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\ge0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

    c) Integrando la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$, y extendiendo f por periodicidad a $\mathbb{R}$, probar que:

    (i) $\displaystyle\sum_{n\ge1} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2)$

    (ii) $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

18. **a)** A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función 2π−periódica que coincide con e^x en $(-\pi, \pi)$, calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n\ge1} \frac{1}{1+n^2}$$

    b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en **a)**, a partir del desarrollo en serie exponencial.

19. Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $-\pi \le x \le \pi$, probar que $f(x)$ es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

20. Sea f una función de período 2π que –en $[-\pi, \pi]$– se define como $f(x) = \cos(ax)$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Desarrollar f en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie: $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n^2-b^2)^2}$, $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

21. Desarrollar en serie exponencial de Fourier $f(x)=\operatorname{sen} x$, $0\leq x\leq 1$. A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de f.

22. **a)** Obtener la serie exponencial de Fourier de $f(x)=e^{\alpha e^{ix}}$, $-\pi\leq x\leq\pi$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

    b) Probar que: $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\alpha\cos x}dx=\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

23. Si

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -1<x\leq 0\\ 0 & 0\leq x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases}\qquad \text{y}\qquad f(x+2)=f(x)\ \ \text{para todo}\ \ x\in\mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a $f(x)$ para todo x.

- Sea f integrable en $[-p,p]$ y tal que $f(x+2p)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

  a) Entonces,

$$\star\ \int_{a-p}^{a+p}f(t)\ dt=\int_{-p}^{p}f(t)\ dt\ \text{para todo}\ a\in\mathbb{R}$$
$$\star\ \int_{2p}^{2p+x}f(t)\ dt=\int_{0}^{x}f(t)\ dt\ \text{para todo}\ a\in\mathbb{R}$$

  b) Si $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$, entonces:

$$g(x+2p)=g(x)\quad\Longleftrightarrow\quad\int_{-p}^{p}f(t)\ dt=0$$

24. Probar que si f es integrable y $2p-$periódica:

$$\frac{1}{2p}\int_0^{2p}f(x)(p-x)\ dx=\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{nw_0}$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $w_0=\frac{\pi}{p}$.

Sugerencia: usar el resultado anterior e integración por partes.

25. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en $(0,\pi)$:

a) $f(x)=\cos x$ **b)** $f(x)=-x$ **c)** $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}\leq x<\pi\end{cases}$

26. Calcular el desarrollos en serie de Fourier de senos de f y y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = x \quad (0 \leq x < \pi)$

27. Sea f $2p-$periódica e integrable. Se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\ dx - \frac{1}{2}at$$

donde $a = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\ dx$. Demostrar que F es $2p-$periódica.

28. Sea $f \in \mathcal{C}^1$ y g una función derivable, ambas $2p-$periódicas con desarrollos exponenciales de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t} \qquad \omega = \frac{\pi}{p}$$

Probar que la función $h(t) = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t-x)g(x)\ dx$ también es derivable y $2p-$periódica y se puede expresar como:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{in\omega t}$$

29. **a)** Probar que la serie $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ no es la serie de Fourier de ninguna función.

b) Calcular la $n-$ésima suma parcial de esta serie.

30. Sean $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ $2\pi-$periódica y $g(x) = 1$ en $(-\pi, \pi)$, también $2\pi-$periódica.

a) ¿Qué relación hay entre f y g?

b) Calcular las series de Fourier de f y de g.

c) Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f. ¿Es la serie de Fourier de g? ¿Converge?

31. Dadas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en $(0, \pi)$, sean:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \qquad T(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{n.\operatorname{sen}(2nx)}{4n^2 - 1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de f y de g.

a) ¿Se puede afirmar que $f(x) = S(x)$ y que $g(x) = T(x)$?

b) ¿Es lícito obtener $T(x)$ derivando término a término $S(x)$?

c) Es lícito obtener $S(x)$ derivando término a término $T(x)$?

Sugerencia: graficar las extensiones de f y de g a $\mathbb{R}$.

32. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Sea $f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \operatorname{sen}((2n+1)x)$ convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$, entonces $f = g$.

33. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$periódicas, dadas por:

$$f(x) = x \quad \text{en} \quad [0, 2\pi) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x \quad \text{en} \quad [-\pi, \pi)$$

a) Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de f y de g y estudiar la convergencia puntual de dichas series.

b) Determinar la función $h(x)$ sabiendo que es la suma de la serie

$$\pi - 4 \sum_{n\geq 0} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$$

y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de h.

34. Desarrollar $\operatorname{sen}^5 t$ en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

Sugerencia: escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

35. Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r\cos t}\cos(r \operatorname{sen} t) \qquad g(t) = e^{r\cos t}\operatorname{sen}(r\operatorname{sen} t) \qquad h(t) = \frac{1}{1 - re^{it}} \quad 0 < r < 1$$

.