Modelo Lineal
PRACTICA 1

1. Pruebe que $(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta)'X'X(\hat{\beta} - \beta)$ y por lo tanto este producto escalar se minimiza en $\beta = \hat{\beta}$.

2. Sea X una matriz de diseño de rango máximo y P la matriz de proyección dada por $P = X(X'X)^{-1}X'$. Pruebe que los subespacios generados por las columnas de las matrices P y X son iguales.

3. Pruebe que si $P = \{p_{ij}\}$, entonces $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = \text{rg }(X)$.

4. Pruebe que

a) si el modelo incluye una constante, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i) = 0$$

b) si la matriz de diseño es de rango completo, $\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i(Y_i - \hat{Y}_i) = 0$

5. Sean A y B matrices de $m \times n$ de constantes y X e Y vectores aleatorios de dimensión n.

a) Pruebe que $E(AX + BY) = AE(X) + BE(Y)$.

b) Pruebe que si a es un vector de constantes de dimensión n entonces $\Sigma_{Y-a} = \Sigma_Y$

6. Llamemos Σ_{XY} a la matriz de covarianza entre los vectores X e Y, es decir $(\Sigma_{XY})_{ij} = cov(X_i, Y_j)$.

a) Pruebe que $\Sigma_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))']$.

b) Pruebe que si X es un v.a. de dimensión m, Y un v.a. de dimensión n y A y B matrices de constantes de $l \times m$ y $p \times n$ respectivamente, entonces $\Sigma_{AX,BY} = A\Sigma_{XY}B'$.

c) Pruebe que si Y es un vector aleatorio y a es un vector de constantes, entonces $E((Y - a)(Y - a)') = \Sigma_Y + (E(Y - a))(E(Y - a))'$

7. Si X es un v.a. tal que ningún elemento de X es combinación de los restantes elementos de X, es decir que no existe ningún vector de constantes a tal que $a'X = b$ para todo valor $X = x$, entonces Σ_X es una matriz definida positiva.

8. Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)'$ un vector aleatorio e $Y_1 = X_1$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$ para $i = 2, \ldots, n$. Si las variables aleatorias Y_i son mutuamente independientes con varianza 1, halle Σ_X.

9. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias cada una con varianza σ^2 y $X_{i+1} = \rho X_i + a$, para $i = 1, \ldots, n-1$, donde a y ρ son constantes, halle Σ_X.

10. Pruebe que $Var(\hat{Y}_i) \leq Var(Y_i)$. Interprete este resultado.

11. Con el fin de estimar dos parámetros θ y ϕ es posible tomar 3 tipos de observaciones:

a) con esperanza θ,

b) con esperanza $\theta + \phi$,

c) con esperanza $\theta - 2\phi$.

Todas las observaciones están sujetas a errores no correlacionados con esperanza 0 y varianza constante. Si se toman m observaciones de tipo a), m del tipo b) y n del tipo c), halle los estimadores de mínimos cuadrados de θ y ϕ y pruebe que son no correlacionados si $m = 2n$.

12. Consideremos el modelo

$$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde $E(\epsilon) = 0$ y además $\Sigma_\epsilon = \sigma^2 I$.

a) ¿Qué condición deben cumplir las X_i's para que los estimadores de β_o y β_1 sean no correlacionados?

b) Si la condición hallada en a) se cumple, ¿cuál es el estimador de β_o?

13. Consideremos el modelo de regresión lineal

$$E(Y_i) = \beta_o + \beta_1 X_i + \beta_2\, \phi(X_i) \quad i = 1, 2, 3$$

donde $\phi(X)$ es un polinomio de segundo grado.

a) Si $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $X_3 = -1$, halle $\phi(X)$ de tal forma que la matriz de diseño X tenga columnas mutuamente ortogonales.

b) Halle el estimador de cuadrados mínimos de β_o, β_1 y β_2, para el modelo hallado en a).

c) Muestre que los estimadores de β_0 y β_1 no cambian si $\beta_2 = 0$.

14. Supongamos que $X = [\mathbf{x}_o\, \mathbf{x}_1\, \ldots\, \mathbf{x}_{k-1}\, \mathbf{x}_k] = [W\, \mathbf{x}_k]$, donde las columnas de X son l.i.

a) Calcule el elemento (k,k) de la inversa de $X'X$ y deduzca que

$$\det\,(X'X) = \det\,(W'W)\left(\mathbf{x}_k'\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k' W (W'W)^{-1} W' \mathbf{x}_k\right)$$

b) Deduzca que $\frac{\det\,(W'W)}{\det\,(X'X)} \geq \frac{1}{\mathbf{x}_k'\mathbf{x}_k}$ y por lo tanto $Var(\hat{\beta}_k) \geq \sigma^2 (\mathbf{x}_k'\mathbf{x}_k)^{-1}$, con igualdad si y solo si $\mathbf{x}_k'\mathbf{x}_j = 0, \quad j = 0, \ldots, k-1$.

15. Pruebe que todas las funciones $c'\beta$ son estimables si y sólo si las columnas de X son linealmente independientes.

16. Pruebe que si $a_1'\beta, \dots, a_k'\beta$ son funciones estimables, entonces cualquier combinación lineal de ellas también lo es.

17. Pruebe que $a'\beta$ es estimable si y sólo si $a'(X'X)^{-}(X'X) = a'$.

18. Supongamos que $E(Y) = X\beta$ y $\Sigma_Y = \sigma^2 I$. Pruebe que $a'Y$ es el estimador lineal insesgado de mínima varianza de $E(a'Y)$ si y sólo si $Cov(a'Y, b'Y) = 0$ para todo b tal que $E(b'Y) = 0$.

19. Supongamos que escalamos las variables regresoras de manera tal que $x_{ij} = k_j w_{ij}$ para todo i, j. Expresando a X en términos de una nueva matriz W, pruebe que $\widehat{Y}$ no se modifica con este cambio de escala. Interprete este resultado.

20. La siguiente tabla corresponde a datos tomados durante 25 meses en una planta de vapor. Se observaron

$Y =$ cantidad de vapor consumido (en libras)

$X_1 =$ promedio mensual de temperatura atmosférica (en Farenheit).

a) Ingrese los datos o lea la matriz de datos contenida en Vapor.txt.

b) Realice el diagrama de dispersión para Y vs. X_1. ¿Qué observa?

c) Halle la media y el desvío standard de cada una de las variables.

d) Si se plantea un modelo $E(Y_i) = \beta_o + \beta_1 X_i, \quad i = 1, 2, \dots, 25,$ halle los estimadores de mínimos cuadrados de β_o y β_1.

e) ¿Cuánto vale el estimador de σ^2?

f) Calcule la matriz de covarianza de los estimadores obtenidos. ¿Cuánto vale en este caso la matriz $X'X$?.

g) Verifique que $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i) = 0.$

h) Centre las observaciones X_i's y recalcule los estimadores de los parámetros. ¿Con quién coincide $\hat{\beta}_o$? ¿Cambia el estimador de σ^2? Recalcule la matriz de covarianza de los estimadores y compárela con la obtenida en f).

$obs.$	X_1	Y
1	35.300	10.980
2	29.700	11.130
3	30.800	12.510
4	58.800	8.4000
5	61.400	9.2700
6	71.300	8.7300
7	74.400	6.3600
8	76.700	8.5000
9	70.700	7.8200
10	57.500	9.1400
11	46.400	8.2400
12	28.900	12.190
13	28.100	11.880
14	39.100	9.5700
15	46.800	10.940
16	48.500	9.5800
17	59.300	10.090
18	70.000	8.1100
19	70.000	6.8300
20	74.500	8.8800
21	72.100	7.6800
22	58.100	8.4700
23	44.600	8.8600
24	33.400	10.360
25	28.600	11.080