Modelo Lineal

PRACTICA 2 (1 Parte)

1. Sean Y_i, $i = 1, \ldots, n$, variables aleatorias independientes con media común θ y varianza σ^2/w_i. Halle el estimador lineal insesgado de θ de mínima varianza y calcule esta varianza mínima.

2. Sea $Y \sim N_n(X\beta, \sigma^2 V)$, donde X es una matriz de $n \times p$ de rango p y V es una matriz conocida definida positiva de $n \times n$. Si β^* es el estimador de mínimos cuadrados generalizados de β, pruebe que

a) $Q/\sigma^2 = (Y - X\beta^*)'V^{-1}(Y - X\beta^*)/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-p}$.

b) Q es un estimador insesgado de $(n-p)\sigma^2$.

c) Si $Y^* = X\beta^* = PY$, entonces P es idempotente, pero en general, no es simétrica. (Hint: analice el modelo transformado)

3. Sean $Y_i = \beta_o + \beta_1 x_i + \epsilon_i \quad (i = 1, 2, 3)$, con $E(\epsilon) = 0$ y $\Sigma_\epsilon = \sigma^2 V$, donde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho a & \rho \\ \rho a & a^2 & \rho a \\ \rho & \rho a & 1 \end{pmatrix}$$

con a y $0 < \rho < 1$ desconocidos, y $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$.

a) Halle los estimadores de mínimos cuadrados generalizados de β_o y β_1.

b) Pruebe que si $a = 1$ entonces los valores ajustados $Y_i^* = \beta_o^* + \beta_1^* x_i$ no pueden ser tales que todos los $Y_i - Y_i^*$ sean positivos o todos negativos.

4. Sea $Y = (Y_1, Y_2)$ un vector con densidad conjunta dada por

$$f(y_1, y_2) = k^{-1}\, exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(y_1-\theta_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(y_1-\theta_1)(y_2-\theta_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2-\theta_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right],$$

donde $k = 2\,\pi\,\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}$, $\sigma_i > 0$, $-\infty < y_i < \infty$ y $|\rho| < 1$. Pruebe que $Y \sim N_2(\theta, \Sigma)$ y halle la correlación entre Y_1 e Y_2.

5. Si $Y \sim N_n(\theta, \Sigma)$, pruebe que $Y_i \sim N(\theta_i, \sigma^2_{ii})$.

6. Pruebe que si $Y \sim N_n(0, I_n)$, $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

7. Sean $Y \sim N_n(0, I_n)$ y A una matriz simétrica e idempotente de rango r. Si $Y'Y = Y'AY + Y'BY$, pruebe que $Y'BY \sim \chi^2_{n-r}$.

8. Sean $Y \sim N_n(0, \Sigma)$ y A una matriz de $n \times n$ simétrica y de rango r. Pruebe que $Y'AY \sim \chi^2_r$, si y sólo si $A\Sigma A = A$.

9. Si X e Y son dos v.a. n–dimensionales independientes con distribución normal multivariada, y si a y b son dos constantes, pruebe que $U = aX + bY$ también tiene distribución normal multivariada.

10. Sea $Y \sim N_3(0, I_3)$. Halle la esperanza de $(Y_1 - Y_2)^2 + (Y_2 - Y_3)^2$.

11. Sean $Y_i = \beta_o + \beta_1 x_i + \epsilon_i, i = 1, \ldots, n$, donde los ϵ_i son independientes y $N(0, \sigma^2)$. Deduzca el estadístico F para testear $H_o : \beta_o = 0$

12. Dado que $\bar{x} = 0$, derive el test F para testear $H_o : \beta_o = \beta_1$ en el ejercicio anterior.

13. Sean $U_1, \ldots, U_n$ v.a. i.i.d. con distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$ y $V_1, \ldots, V_n$ v.a. i.i.d. con distribución $N(\mu_2, \sigma^2)$ e independientes de las anteriores. Derive un test F para $H_o : \mu_1 = \mu_2$.

14. Una serie de $n + 1$ observaciones independientes $Y_i, i = 1, \ldots, n + 1$ son tomadas de una población con distribución normal con varianza desconocida σ^2. Después de las n primeras observaciones se sospecha que ha habido un repentino cambio en la media de la distribución. Derive un test para testear la hipótesis de que la observación $(n + 1)$–ésima tiene la misma media que las n anteriores.