1. En un problema de ingeniería se intenta modelar la variable de respuesta Y como función de una variable regresora x mediante un modelo polinomial de segundo grado. Se tomó una muestra de tamaño n, $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ y se consideró el modelo dado por

$$Y_i = \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \epsilon_i \quad \text{donde} \quad E(\epsilon_i) = 0, \quad \Sigma_\epsilon = \sigma^2 I, \quad 1 \leq i \leq n$$

a. Halle el estimador de mínimos cuadrados de β_1 y β_2, suponiendo que la matriz de diseño tiene rango completo.

b. ¿Qué condición se debe cumplir para que los estimadores hallados en a) sean no correlacionados?

c. Deduzca un test F para testear si el coeficiente que acompaña a la componente cuadrática es 0 o no. Indique claramente las hipótesis nula y alternativa y la zona de rechazo. ¿Necesita algún supuesto adicional sobre el modelo para poder realizar este test?

2. Considere el modelo $Y = X\beta + \epsilon$, donde $\epsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ y X es una matriz $n \times p$ de rango p. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ los autovalores de la matriz $X'X$ y llamemos $\widehat{\beta}$ al estimador de mínimos cuadrados de β.

a. Muestre que $\sum_{j=1}^{p} Var(\widehat{\beta}_j) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{-1}$. ¿Cuál es el efecto de pequeños autovalores sobre la varianza de los coeficientes?

b. Si $tr(X'X) = c$, donde c es una constante dada, pruebe que $\sum_{j=1}^{p} Var(\widehat{\beta}_j)$ se minimiza si $X'X = c/pI_p$.

c. Muestre que $E(\widehat{\beta}'\widehat{\beta}) = \beta'\beta + \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{-1}$. ¿Cuál es el efecto de pequeños autovalores sobre la tendencia de $\widehat{\beta}'\widehat{\beta}$ a sobreestimar $\beta'\beta$?

d. Suponga que podría incorporar m observaciones adicionales que provienen del modelo supuesto y que estas observaciones están contenidas en la matriz X^* de dimensión $m \times p$ con $m \geq p$ y además que $X^{*\prime} X^* = dI_p$. Pruebe que después de incorporar las m observaciones adicionales $\sum_{j=1}^{p} Var(\widehat{\beta}_j) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} (d + \lambda_j)^{-1}$. ¿Cuándo sería conveniente incorporar esta información adicional para reducir $\sum_{j=1}^{p} Var(\widehat{\beta}_j)$?

3. Suponga que el modelo que describe la relación entre x_i y y_i es el modelo de regresión lineal simple dado por

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i, \text{ con } \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes, para } i = 1, \ldots, n.$$

El investigador A obtiene los estimadores de mínimos cuadrados $\widehat{\beta}_1$ y $\widehat{\beta}_2$ para estimar a β_1 y β_2 respectivamente. El investigador B supone que $\beta_1 = 0$ y estima β_2 usando el coeficiente de mínimos cuadrados $\widehat{\beta}^* = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i / \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

a. ¿Cuál es el sesgo del estimador de β_2 usado por el investigador B? ¿Cuándo resulta este estimador insesgado?

b. Calcule $Var(\widehat{\beta}^*)$ y muestre que $Var(\widehat{\beta}^*) \leq Var(\widehat{\beta}_2)$.¿Bajo qué condiciones $Var(\widehat{\beta}^*) = Var(\widehat{\beta}_2)$?

c. Halle el error cuadrático medio de $\widehat{\beta}^*$, $ECM(\widehat{\beta}^*)$.¿Bajo qué condiciones $ECM(\widehat{\beta}^*) < ECM(\widehat{\beta}_2)$? ¿Estas condiciones se encuentran en general para n pequeños o grandes?